

多目的輸送問題に対する対話的アプローチ

樋口 圭司 (沼田一道助教授, 桧垣正浩助手)

1. はじめに

輸送問題とは, m 個の供給点から n 個の需要点へ, 各点での需給条件を満たすように物品を輸送するとき総費用最小の輸送計画を求める問題である. この問題は, 特別な構造を持った線形計画問題として定式化され, 古くからよく研究されている [3]. しかし, 現実の場で輸送問題を考えるとき, 輸送費用だけでなく, 他の目的 (輸送時間, 輸送の確実性等) を考慮することもしばしば必要になる.

本研究ではこのような状況をモデル化した, 複数の目的関数を持つ輸送問題 (多目的輸送問題) を取り上げ, 納得できる解 (妥協解) をオペレータ (意思決定者: Decision Maker, DM) との対話を通して段階的に絞り込んでいく方法 ([1] でそのアイデアが提案されている) を, ワークセッション上に実現する.

2. 研究の内容

多目的最適化問題においては, 一つの目的関数値が良くても他の目的関数値が良いとは限らないので, いわゆる“最適解”の概念は一般には成立しない. 最適解の代わりに中心的役割を果たすのが非劣解 (Nondominated Solution) である. 非劣解とは, 対応するどの目的関数値において, 他の目的関数値の少なくともどれか1つを犠牲にする (悪化させる) ことなしにはその値を改善させることができない実行可能解のことである.

実行可能解 x に対応する目的関数値を

$$f(x) = (f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_p(x))$$

とベクトルであらわし, ベクトルの順序関係 (\leq), 優劣関係 (\ll) を以下のように定義する.

$$f(x_1) \leq f(x_2) \Leftrightarrow f_k(x_1) \leq f_k(x_2) \quad k=1, \dots, p$$

$$f(x_1) \ll f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \text{ かつ } f(x_1) \neq f(x_2)$$

実行可能解の集合を F とすれば, 非劣解は次のように定義できる.

$$\text{解 } x \text{ が非劣} \Leftrightarrow \forall x' \in F, \overline{f(x')} \ll f(x)$$

以下では3目的 ($p=3$) の場合に限って進めていく.

3目的輸送問題は次のように定式化される. m 個の供給地と n 個の需要地があり, 供給地 i での供給量を a_i , 需要地 j での需要量を b_j とする. また供給地 i から需要地 j への輸送量を x_{ij} , 基準 k における輸送量1単位当たりのペナルティを c_{ij}^k とする.

$$\text{最小化} \quad f_k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^k x_{ij} \quad : k=1, 2, 3$$

$$\text{制約条件} \quad x = \{x_{ij}\} \in F$$

$$F = \{x \mid \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i : i=1, \dots, m, \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j : j=1, \dots, n, \\ x_{ij} \geq 0 : i=1, \dots, m, j=1, \dots, n\}$$

多目的最適化問題においては, 実行可能解の集合のうち, 非劣解のみを考慮の対象とすれば良い事を利用し, 以下のようなアプローチを行う.

3. 解法の原理

各目的関数の重みを $\lambda \in \Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mid \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 : i=1, 2, 3\}$ としてこの重みで各目的関数を統合した重み付け線形計画問題 $(P\lambda)$ を考える。

$$(P\lambda) \quad \text{最小化} \quad \{\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x)\}$$

$$\text{制約条件} \quad x \in F$$

このとき次が成り立つ。

$x \in F$ が非劣解 $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda, x$ は $(P\lambda)$ の最適解
重みの可能集合 Λ は正三角形（面積座標／重心座標）で図形表示できる（図1）。

本研究で示すアイデアは、重み λ を入力し、それに対する最適解（非劣解）を求め、求めた非劣解を参考にしながら新たな重みを入力するというを繰り返して、満足すべき妥協解に近づいていくというものである。この時、同じ非劣解をもたらす重みの部分集合を求めて図形表示する（図2）。これは目的関数の係数を変化させたときの感度解析に相当するものである。このことによりDMは次に入力する重み λ の範囲を徐々に限定していくことができ、システム側の計算負担とDMの同一非劣解を導く重みの選択を減らすのに役立つ。

4. 実際の方法

$(P\lambda)$ を次式のように書く。

$$\text{最小化} \quad (\lambda_1 c^1 + \lambda_2 c^2 + \lambda_3 c^3) x$$

ただし

$$c^k = (c_{11}^k, c_{12}^k, \dots, c_{1n}^k, c_{21}^k, c_{22}^k, \dots, c_{2n}^k, \dots, c_{m1}^k, c_{m2}^k, \dots, c_{mn}^k)$$

対話の流れに沿い、DMのアクションとシステム側の処理を併せて記述していく。

- (1) DMによる、供給地と需要地の数、各供給量 (a_j) と各需要量 (b_j) 、各目的関数のペナルティ $(c_{ij}^k : k=1, 2, 3)$ の入力。
- (2) DMは各多目的関数の考慮の割合（重み）を勘案して、三角形の内部の1点をクリックする。クリックした点からおろした垂線の長さの比が重み λ となる（図3）。
- (3) 重み λ によって3つの目的関数を一つに統合する。
- (4) (3)によって作られた単一目的輸送問題を解き（北西隅のルール、飛石法を使う）、最適解を表示する。
- (5) (4)で得られた最適解と同じ非劣解 x を導く重み λ の集合を求める。
- (6) (5)で求めた重みの集合を重み空間に描画する（図4）。
- (7) DMが、満足できる妥協解を決定するのに十分と判断したならば終了。そうでなければ(2)に戻る。

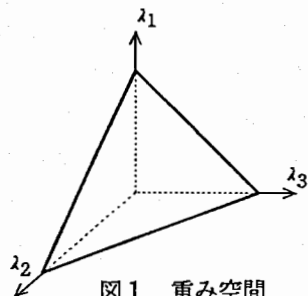


図1. 重み空間

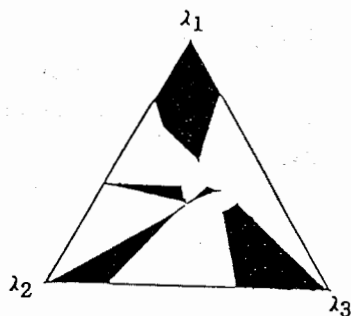


図2. 分割された重み空間

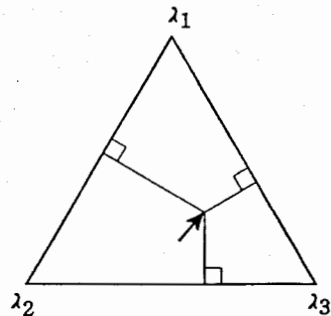


図3. 重みの指定

(5)の詳細

(Pλ)の目的関数は $\sum_i \sum_j c_{ij}(\lambda) x_{ij}$ と書ける.

ただし, $c_{ij}(\lambda) = c_{ij}^1 \lambda_1 + c_{ij}^2 \lambda_2 + c_{ij}^3 \lambda_3$.

まず, 現在指定されている重み λ_0 で (Pλ₀) の最適解を求める.

最適基底形式における第 i 行 (i=1, ..., m) のシンプレックス乗数

(λをパラメータとする) を $u_i(\lambda)$, 第 j 列 (j=1, ..., n) のそれ

を $v_j(\lambda)$ とする. $u_i(\lambda)$, $v_j(\lambda)$ は, 目的関数 f_1, f_2, f_3

に対するシンプレックス乗数を $u^1, v^1, u^2, v^2, u^3, v^3$ と

するとき, $u_i(\lambda) = \lambda_1 u_i^1 + \lambda_2 u_i^2 + \lambda_3 u_i^3, v_j(\lambda) = \lambda_1 v_j^1 + \lambda_2 v_j^2 + \lambda_3 v_j^3$

と与えられる.

(Pλ₀) の最適解における非基底変数の集合を NB_0 とするとき, $x_{ij} \in NB_0$ に対する相対コスト

$\bar{c}_{ij}(\lambda)$ は次のように書ける.

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ij}(\lambda) &= c_{ij}(\lambda) - u_i(\lambda) - v_j(\lambda) \\ &= \lambda_1 (c_{ij}^1 - u_i^1 - v_j^1) + \lambda_2 (c_{ij}^2 - u_i^2 - v_j^2) + \lambda_3 (c_{ij}^3 - u_i^3 - v_j^3) \\ &= \lambda_1 c_{ij}^1 + \lambda_2 c_{ij}^2 + \lambda_3 c_{ij}^3 \end{aligned}$$

ただし, \bar{c}_{ij}^k は目的関数 k の $x_{ij} \in NB_0$ に対する相対コストである.

そしてこれらの値が0以上であるλの領域では現在の解の最適性が保存される. すなわち非基底変数の個数 $\{m * n - (m + n - 1)\}$ 本の連立不等式

$$\lambda_1 c_{ij}^1 + \lambda_2 c_{ij}^2 + \lambda_3 c_{ij}^3 \geq 0$$

を満たす領域が Pλ₀ の最適解を非劣解とする重みの集合となる.

5. 重み空間の部分集合の求め方

重み空間の部分集合は以下のようにして求める.

例として供給地3, 需要地4の問題を考え, ある重みについて最適解が求まり, その非基底の成分における相対コストが次のように与えられたとする.

相対コスト	$c_{11}^1 = 1, c_{11}^2 = -2, c_{11}^3 = 1,$	不等式	$1 \lambda_1 - 2 \lambda_2 + 1 \lambda_3 \geq 0$
	$c_{13}^1 = 2, c_{13}^2 = -2, c_{13}^3 = -1,$		$2 \lambda_1 - 2 \lambda_2 - 1 \lambda_3 \geq 0$
	$c_{21}^1 = -1, c_{21}^2 = -1, c_{21}^3 = 3,$		$-1 \lambda_1 - 1 \lambda_2 + 3 \lambda_3 \geq 0$
	$c_{22}^1 = -2, c_{22}^2 = -1, c_{22}^3 = 7,$		$-2 \lambda_1 - 1 \lambda_2 + 7 \lambda_3 \geq 0$
	$c_{32}^1 = 0, c_{32}^2 = 0, c_{32}^3 = 1,$		$0 \lambda_1 + 0 \lambda_2 + 1 \lambda_3 \geq 0$
	$c_{34}^1 = -1, c_{34}^2 = 0, c_{34}^3 = 3,$		$-1 \lambda_1 + 0 \lambda_2 + 3 \lambda_3 \geq 0$

(1)初期値として, 有効な領域の端点①(1, 0, 0), ②(0, 1, 0), ③(0, 0, 1)を与え, また領域を囲む点の順番(反時計廻り)を考えたとき次に来る点の番号をaftで表しaft[1]=2, aft[2]=3, aft[3]=1と与える. それぞれの不等式の表す平面と, 有効な領域を囲む各線分を含む直線との交点を, クラメル公式を用いて求め, その点が線分上にあるかを調べる.

(2)第1の不等式は, 線分①②と交わっており(交点④(2/3, 1/3, 0)), 端点①②のうち②は不等式を満たしていないのでaft[1]=4. 線分②③とも交わっており(交点⑤(0, 1/3, 2/3)), 端点②は不等

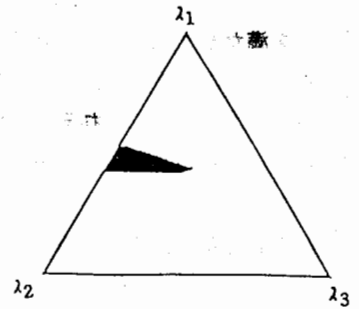


図4. 同じ非劣解を導く重み

式を満たしていないので $\text{aft}[5]=3$. 線分③①とは交わらない. 一周したのでこの不等式は終了で, 新たに加えられた点(④⑤)のうち aft に値のないほうにもう一方の番号を入れる. $\text{aft}[4]=5$. 現在の領域は (⑤-③-①-④-⑤).

(3) 第2の不等式は, 線分⑤③とは交わらない. 線分③①と交わり(交点⑥ $(1/3, 0, 2/3)$) 端点③は不等式を満たしていないので $\text{aft}[6]=1$. 線分①④とは交わらない. 線分④⑤と交わり(交点⑦ $(4/9, 1/3, 2/9)$), 端点⑤は不等式を満たしていないので $\text{aft}[4]=7$. 一周したのでこの不等式は終了, $\text{aft}[7]=6$. 現在の領域は (⑦-⑥-①-④-⑦).

(4) 第3の不等式は, 線分⑦⑥と交わり(交点⑧ $(7/16, 5/16, 1/4)$), 端点⑦は不等式を満たしていないので $\text{aft}[8]=6$. 線分⑥①と交わり(交点⑨ $(3/4, 0, 1/4)$), 端点①は不等式を満たしていないので $\text{aft}[6]=9$. 線分①④, ④⑦とは交わらない. 一周したのでこの不等式は終了, $\text{aft}[9]=8$. 現在の領域は (⑨-⑧-⑥-⑨).

(5) 第4の不等式は, どの線分とも交わらないのでこの不等式は終了.

(6) 第5の不等式においては係数が3つとも0以上なので, すべての λ において不等式が成立する.

(7) 第6の不等式は, 線分⑨⑧と交わるが両端点(⑨⑧)とも不等式を満たしているので更新しない. 線分⑧⑥とは交わらない. 線分⑥⑨とは交わるが同様に両端点とも不等式を満たすので更新しない. 一周したのでこの不等式は終了.

(8) 不等式がなくなったので終了. 従って求める領域は $\textcircled{9}(3/4, 0, 1/4) - \textcircled{8}(7/16, 5/16, 1/4) - \textcircled{6}(1/3, 0, 2/3)$ となる.

6. おわりに

本研究では3目的輸送問題を扱う意思決定者に対して, その決定過程を対話的に支援するシステムを実現した. このシステムは3つの目的関数の相対的重みを変えながら, 満足のいく解を探索する際, 現在(過去)求めた解が非劣解となるような重みの集合や, そのときの目的関数値を逐次グラフィック表示していくので, DMは能率的に探索を行うことができる. またシステムの側から見れば, DMとの対話により, 興味のない非劣解を計算したり, 同一非劣解を導く重みを試したりする必要がなくなるので, 計算量の減少にも貢献する.

今後の課題としては, Motif ライブラリ等を用いてシステムの更なる操作性の向上を目指すことが挙げられる.

《参考文献》

- [1] Joao N. Climaco, C. Henggeler Antunes, Maria J. Alves: "Interactive decision support for multiobjective transportation problems", European Journal of Operational Research, Vol. 65, No. 1, pp. 58-67, 1993.
- [2] 伏見多美雄, 福川忠昭, 山口俊和: "経営の多目標計画", 森北出版株式会社, 1989.
- [3] 古林 隆: "線形計画法入門", 産業図書, 1981.
- [4] 坂和正敏: "線形システムの最適化", 第10章多目的線形計画法, 森北出版株式会社, 1984.

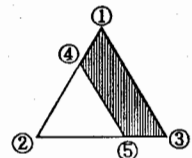


図5. 第1の不等式の領域

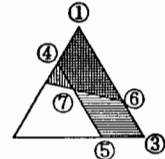


図6. 第2の不等式の領域

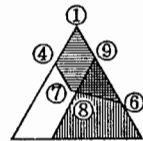


図7. 第3の不等式の領域

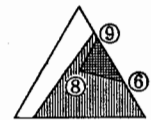


図8. 第4の不等式の領域

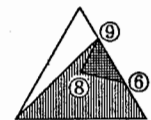


図9. 第6の不等式の領域