分枝限定法におけるヒューリスティックな部分の評価に関する一研究

卯尾　有史　（沼田一道助教授，桧垣正浩助手）

1．はじめに

現実に存在する問題には，組み合わせ的な要素を含む問題が多く，モデル化すると整数計画問題や混合整数計画問題となることが多い．これらの問題に対し，様々な解法が研究されている．この中で代表的な解法が分枝限定法である．

組合せ最適化問題は，問題の規模が大きくなるほど可能な解の組合せが増加するので，いかに効率よく問題を解いていくかが重要である．分枝限定法の分野では，対象とする問題固有の特徴を生かした効率的な解法が多く研究されている．しかし，これら問題固有の特徴を生かした研究は，分枝限定法で必要な下界値計算（上界値計算）のみを議論し，分枝限定法に内在するヒューリスティックな部分に対してはあまり議論していない．

分枝限定法における代表的なヒューリスティックな部分として，探索の方向，分枝の方法がある．これらは，非常に重要な項目であるが，実際の探索例に基づく研究はあまりなされていない．アルゴリズムの開発者は，初期暫定値計算，下界値計算にどのくらいの時間をかければ良いのか，早く解を得るためには，分枝方法，下界値計算方法のどちらを変更するべきなのかを判断する必要がある．

2．研究目的

分枝限定法を用いて効率的に解を求めるアルゴリズムは多種多様であり，色々なテクニックを組み合わせて問題をさらに効率的に解くことも可能である．アルゴリズムの実行過程を定量的に測定し，アルゴリズムの設計，チューンアップの支援を行うことを本研究の目的としている．このために，分枝限定法の解の探索過程に対する評価として４つの項目を提案する．

分枝限定法自体は，問題に依存しない構造を持つ．このため評価は，問題に依存しないように設計できるはずであるが，任意の問題を対象とする事は非常に困難であるため，本研究では，代表的な組み合わせ最適化問題である巡回セールスマン問題を取り上げる．

3．分枝限定法

次のような問題（ P_0 ）について考える．ここでは一般性を失わずに最小化問題について考える．

$$(P_0) \qquad \text{最小化} \quad f(\boldsymbol{x}) \qquad (1)$$

$$\text{条件} \quad \boldsymbol{x} \in X \qquad (2)$$

ここで，$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数であり，X は与えられた問題の実行可能解集合である．実行可能解集合の中から与えられた既知の関数 $f(\boldsymbol{x})$ を最小化する問題である．

分枝限定法は，分枝操作と限定操作から構成され，これらの操作を繰り返し行う事により，与えられた問題を解く．

まず，与えられた問題（ P_0 ）を何らかの方法で解こうとする．これが解けなければ，実行可能解集合を２つ以上に分割した問題（ P_1 ），（ P_2 ），…　を作る．これらの分割された問題の中で，最も良い目的関数値を持つ解が分割する前の問題（ P_0 ）の最適解となる．分割された問題が解けなければ，再び複数の問題に分割する．この問題の分割が分枝操作である．

分枝操作を繰り返し行うだけでは，解くのに時間がかかるため，解を探索しなくても良い領域（解

かなくても良い問題）を探す．探索途中に見つかった，（P_0）の良い実行可能解を暫定解と呼び，記憶する．解こうとする分割された問題の最適解がわからなくても，暫定解よりも良い解が得られない事が保証できれば，その問題は解かなくても良い．これが限定操作である．

問題の制約を緩和した問題（緩和問題）の最適目的関数値は，緩和しない問題の最適目的関数値を上回る事はないので，緩和問題の最適目的関数値を指標として限定操作を行う．

以上の操作を繰り返し行い，全ての分割された実行可能解集合について探索が終了した時，最も良い暫定解が最適解となる．

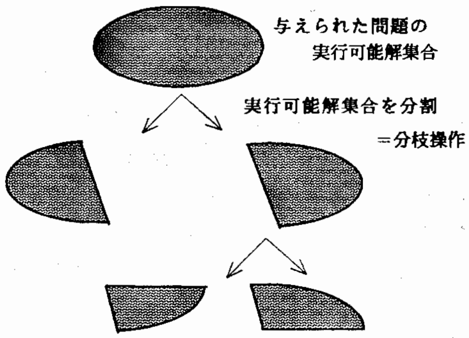

図１　実行可能領域の分割

ところで，分枝操作を行ったとき，効率的に解を探索するために，どの問題を次に解くかが重要である．それぞれの問題の実行可能領域において，各緩和問題の最適目的関数値を計算し，それを指標に次に解く問題を選択するが，緩和問題の良い解の存在する方に必ずしも良い実行可能解が存在するとは限らない．分枝限定法にはこのようなヒューリスティックな部分が存在する．

４．巡回セールスマン問題

有名な組み合わせ最適化問題として巡回セールスマン問題がある．本研究では，分枝限定法を用いて解く問題として，この巡回セールスマン問題を取り上げる．

まずn 個の都市が与えられ，任意の２つの都市間の費用（移動時間，距離など）が分かっているとする．そこで，n 個の都市を全て一回ずつ訪問するような道順を巡回路とよぶ．

巡回セールスマン問題とは，費用を最小にするような巡回路を求める問題である．都市 i から j へ移動するのにかかる費用を c_{ij} とおく．

都市 i から j へ移動するときは，変数 $x_{ij}=1$ ，移動しないときは $x_{ij}=0$ とおく．

この問題を定式化すると次のようになる．

$$\text{最小化}\quad z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{3}$$

$$(TSP)\quad \text{条件}\quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1 \qquad j=1,\cdots,n \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 \qquad i=1,\cdots,n \tag{5}$$

$$\sum_{j\in V}\ \sum_{i\in N\setminus V} x_{ij}\geqq 1 \qquad \forall V\subset N\ (V\neq\phi,\ V\neq N) \tag{6}$$

$$x_{ij}\in\{0,\ 1\} \qquad i,\ j=1,\cdots,n \tag{7}$$

ただし，$N=\{1,\cdots,n\}$ である．

５．分枝限定法を用いた巡回セールスマン問題の解法

分枝限定法を用いて，問題（TSP）を解くにはその緩和問題が必要である．ここでは，割当問題を用いた解法を説明する．［３］

問題（TSP）の（6）式を緩和した問題（R）を考える．緩和した問題（R）の解は巡回路を構成するとは限らないが，解が巡回路を構成すれば，最適解を得たことになる．

解が巡回路を構成しなければ，分枝限定法に従い，解く．

まず問題を右子問題と左子問題と呼ばれる問題に分ける．適当な枝（都市間の道）を選択し，右子問題では選択した枝を通過し，左子問題では選択した枝を通過しない問題と考える．

右子問題を解いて最適解が得られなければ，更にこの問題を右子問題と左子問題に分け，右子問題が巡回路を構成するか，実行可能解が存在しなくなるまで問題を分割する．

次に左子問題について考える．左子問題では選択された枝を含まない条件が入るため，最低どれだけの費用（下界値）がかかるかを求める．この左子問題の費用と，巡回路を構成した時の費用を比較し，左子問題の費用の値が良ければ，左子問題の条件の方（選択された枝を含まない）に良い解がある可能性があるので，左子問題を先に解く．

ある子問題の下界値が，巡回路を構成するときの費用より劣る場合は，その子問題は解かなくても良いことになる．

6．分枝限定法の解の探索過程に対する評価項目

解法の評価には，演算速度，必要な記憶容量という相反した性質を考えなければならないが，本研究では演算速度，つまり解が求まるまでの時間を中心に考える．分枝限定法のヒューリスティックな部分に対する評価項目として，次の4項目を本論文では提案する．

①もしも最適に探索できた場合，どのくらい演算時間が短縮できるか．

分枝限定木を解析することにより，最適に探索した状態を考える．最適に探索した場合，最初に発見された暫定解が最適解になる．このように探索したときにかかる演算時間と実際にかかった演算時間を比較する．

この比較によって，演算時間を減少させるためには，分枝方法を見直すのか，下界値計算方法を見直すのかを判断する情報を得る．もし最適に探索した場合の演算時間が大幅に短くなれば，悪い探索方法によって最適解の存在する実行可能解集合と離れた集合を探索したために，演算時間が増えたと考えられる．

また，この値により，分枝方法を改善した場合の演算時間の減少の限界を知ることができる．最適に分枝した場合の演算時間より速く解くためには，下界値を求めるアルゴリズムを変更しなければならないことを指摘している．

②分枝後の探索方向の正確さ

分枝後，先に探索した子問題に良い解が存在すれば，演算時間を短くできる．分枝限定木全体での分割した問題について，探索方向が正しかった問題と，誤っている問題を数え，間違い率を各分枝限定木の深さなどの情報とともに表示する．

③初期暫定解の評価

既往の研究では，分枝限定法で問題を解き始める前に良い実行可能解（初期暫定解）を得ることにより，演算時間を減少できることが指摘されている．しかし，初期暫定解を求めるのにどのくらい時間を費やせばよいのかは指摘されていない．

初期暫定解の設定により演算時間がどれだけ変化するかグラフ表示する．これにより初期暫定値計算が必要かどうかを判断する情報を得る．

また必要だと判断した場合，どのくらい初期暫定解の計算に時間を与えればよいのかを知ることができる．

④下界値の強化に対する演算時間の影響

強い下界値（良い下界値）が求まれば，子問題数が見切られる確率が高くなり，それだけ探索する部分問題が減るが，一般に強い下界値を得るためには，１つの下界値計算に時間がかかる．下界値の強化度合いに対する演算時間の変化を示し，下界値の強化が必要かどうかを判断する情報を得る．

この評価は切除平面，劣勾配法を用いたような繰り返しを持つ下界値計算法の場合に有効になる．

7．実行結果

１０都市の非対称巡回セールスマン問題を乱数を用いて作成した．

使用した開発言語はＣ言語で，コンピューターは，ＳＰＡＲＣ　Ｃｌａｓｓｉｃである．

実験によって，以下の結果を得た．

問題を解くのにかかった時間は，１７０秒で，最適に探索した場合１６７秒かかる．解く時間を減らすためには，下界値計算法を見直す必要があると判断される．

図２は，初期暫定解によって，どれくらい演算時間が短縮できるかを示す．例えば１０都市の問題に対して，約３０秒で最適解の５％以内の解を求める近似アルゴリズムならば，初期暫定値計算に用いた方が有利であることがわかる．

図３は，強化された下界値によって，どれくらい演算時間を短縮できるかを示す．

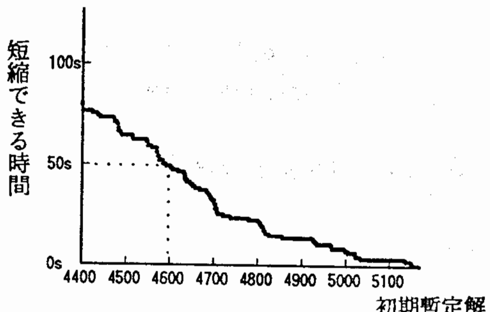

図２　初期暫定解による短縮時間

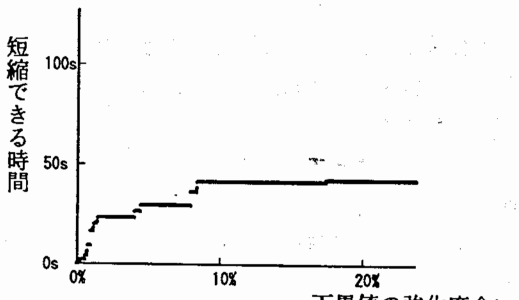

図３　下界値強化による短縮時間

8．おわりに

本研究では，分枝限定法で解く問題として，巡回セールスマン問題を取り上げ，分枝限定法のアルゴリズムの改良を支援するための様々な評価項目を提案した．これにより，アルゴリズムの改良点として下界値を強化すればよいか，初期暫定解を得ればよいか，探索方向を改善すればよいかがわかる．

それぞれの評価項目は独立しているので，今後の課題としては，２つ以上の評価項目を組み合わせた場合の評価を行うことが挙げられる．

《参考文献》

［１］桧垣正浩，品野勇治：”分枝限定法アルゴリズムの視覚化及び解析ツール”，電子情報通信学会１９９３年春期大会講演論文集，ｐ．９，１９９３．

［２］桧垣正浩，品野勇治：”分枝限定法アルゴリズムの視覚化及び解析ツールの試作”，電子情報通信学会１９９３年秋期大会講演論文集，ｐ．８９，１９９３．

［３］今野浩，鈴木久敏：”整数計画法と組み合わせ最適化”，ＯＲライブラリー第７巻，日科技連，１９８２．