確率的な属性を含んだ 多目的最短路問題に関する研究

和久井　健資（沼田一道助教授，桧垣正浩助手）

1．はじめに

年々，複雑になる物流問題に直面している企業にとって，目標地点間の輸送の際にどの道を選択するかということはますます重要になってきている．最適経路（最短経路）を決定するためには経路の持つ多数の属性を考慮しなくてはならない．あるものは輸送時間を最短にする事を目的とし，またあるものは輸送コストを最小にしようとする．時間とコストを同時に小さくすることを目的とするものもいるかもしれない．このように様々な基準を有する組織にとっては，各経路の複数の属性（目的関数値）を独立に考えるのではなく，同時に考えることが大切である．

さらに，現実世界では輸送時間などの非常に不確定な属性があり，実体に即した最適経路を決定するためには，いくつかの属性値は一つの確定値として考えるのではなく，幅を持った確率分布として考える必要がある．

2．研究目的

本研究では，文献［３］で示された確率的な属性の比較の方法を検討し，改良した新たな比較方法を考える．これを，m個の確率的な属性（m≧１）とｎ個の確定的な属性（ｎ≧１）を目的関数とする多目的最短路問題に組み込み，非劣経路の集合を求めるアルゴリズムを提案する．

3．確率的な属性

グラフG＝（V，L）において，Vはノードの集合，Lはリンクの集合とする．Lに属する各リンク（ｉ，ｊ）はそれぞれの目的関数に対応した非負の値h^k_{ij} を持つ（ k は属性番号）．始点ｓから終点ｔまでの経路R_{st} を考えるとき,経路の目的関数値を$A_{st} \equiv (A^1_{st}, A^2_{st}, \cdots, A^k_{st}, \cdots, A^{m+n}_{st})$ とした属性値リストで表す．第k 属性値 A^k_{st} は，R_{st} を構成する各リンクの第k 属性値の合計，$h^k_{s-} + \cdots + h^k_{-t}$ であるとする．リンクの第k 属性が確率的であるとき，h^k_{ij} は平均μ^k_{ij} ，分散ν^k_{ij} の正規分布に従うと仮定する．このとき，A^k_{st} もまた正規分布に従う確率変数となり，その平均μ^k_{st} ，分散ν^k_{st} は，

$$\mu^k_{st} = \mu^k_{s-} + \cdots + \mu^k_{-t} \tag{1}$$

$$\nu^k_{st} = \nu^k_{s-} + \cdots + \nu^k_{-t} \tag{2}$$

となる．

ここで，各リンクの属性値が正確には正規分布に従わなかったとしても，その合計である経路の属性値は，含まれるリンクの数が多ければ中心極限定理により，ほぼ正規分布に従うとみなす事ができる．一般に，３０前後のリンクを含めば中心極限定理が有効である．

4．非劣経路

ｓからｔへの経路の集合を S （$S = \{R_1, R_2, \cdots, R_r\}$ ）とする．最小化問題において， S 中のR_i とR_j （$i \neq j$ ）を比較するとき，その属性値リスト（目的関数値）A_i とA_j について，

$$A_i \leqq A_j \ \ (A^l_i \leqq A^l_j \ ; \ l=1,2,\cdots,m+n), \ A_i \neq A_j \tag{3}$$

ならば，A_j はA_i より劣であるという．属性値リストA_i に対し，A_i を劣にするA_j が S に存在しないときA_i は非劣であるといい，R_i は非劣経路という．

5．確率的な属性の比較

確率的な属性値にははっきりとした大小の順序がない．そこで，その順序（優劣関係）を比較し決定するルールを考える．経路 R_1 と R_2 を，ある確率的な属性値A^k についてだけ比較するとき，A_1^k が確率的に A_2^k より小さかったら（$A_1^k \lessdot A_2^k$），A_1^k は A_2^k より優れている．A_1^k が確率的に A_2^k より小さくなく，A_2^k が確率的にA_1^k より小さくなかったら，（$A_1^k \not\lessdot A_2^k$，$A_1^k \not\gtrdot A_2^k$ ），どちらが優れているとはいえない．このとき，A_1^k とA_2^k は比較不能であるという．

5．1．既存の比較ルール

Wijeratne et al. [3] は$N(\mu_1^k, \nu_1^k)$ に従うA_1^k と$N(\mu_2^k, \nu_2^k)$ に従うA_2^k の大小を比較する段階的な２つのルールを提案している．

第一段階比較ルール

$$\mu_1^k < \mu_2^k \quad \text{かつ} \quad \nu_1^k \leqq \nu_2^k \tag{4}$$

もしくは

$$\mu_1^k \leqq \mu_2^k \quad \text{かつ} \quad \nu_1^k < \nu_2^k \tag{5}$$

$$\Longrightarrow \quad A_1^k \lessdot A_2^k$$

第二段階比較ルール

A_i^k の分布関数を$F_i^k(t)$ とする．

あるp_0（$0<p_0<0.5$）に対し，

$$\mu_1^k < \mu_2^k \quad \text{かつ} \quad \nu_1^k > \nu_2^k$$

のとき図１に示すように$F_1^k(t)$ と，$F_2^k(t)$ が交差するt をt_c とし，

$$F_1^k(t_c) = F_2^k(t_c) > 1-p_0 \tag{6}$$

$$\Longrightarrow \quad A_1^k \lessdot A_2^k$$

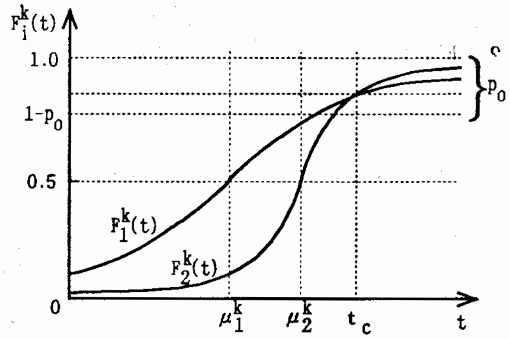

図１　$A_1^k(\mu_1^k, \nu_1^k)$と$A_2^k(\mu_2^k, \nu_2^k)$の分布関数　（$\mu_1^k<\mu_2^k$，$\nu_1^k>\nu_2^k$）

第一段階比較ルールにより，平均と分散は相関のない２つの確定値としてあつかうことができる．その後，第二段階比較ルールを適用する．第二段階比較ルールにおいて，p_0 は比較の失敗のレベルを決定する危険率である．はじめにp_0 を小さくとり，徐々に大きくしていくことによりこの比較ルールは非劣経路の集合を少なくしていくことができる．

これらのルールで比較不能のときは，他の属性値に関わらず（確率的）単一目的関数に関して互いに非劣経路である．

5．2．既存の比較ルールの考察

第二段階比較ルールは大きな矛盾点がある．例えば，$p_0 = 0.02$ で，

$$N(40.05,\ 3.31^2) \tag{7}$$
$$N(40.60,\ 3.33^2) \tag{8}$$
$$N(42.11,\ 1.96^2) \tag{9}$$

を比較したとき，(7)と(8)は大小が決まるが，(7)と(9)では大小が決まらない．そこで，それぞれの

乱数を発生させて比較することを１００００回行った．このシミュレーションの結果，(7)と(8)では，(7)の小さくなる割合は５５．１８％しかなかったが，(7)と(9)では，(7)の小さくなる割合は７０．１０％もあった．これは，２つの分布関数の関係をそれらの交点でしか判定していないために起こったことである．

５．３．新しいルールの提案

ここで，上で指摘した点を考慮し，実際に A_1^k が A_2^k よりも小さくなる確率を計算し，それをもとに比較する以下のルールを提案する．

$$Prob\{A_1^k < A_2^k\} = 0.5 + \alpha \Longrightarrow A_1^k \prec A_2^k \tag{10}$$

α は余裕率である．集合Ｓにおいて $\alpha = 0$ とするとＳに含まれる全ての経路の間には全順序関係が成立する．その際，優劣の順序は平均値の小さい順となるが α を徐々に増やすことにより比較不能なものができ始め，$\alpha = 0.5$ で全ての経路が比較不能になる．

このルールでは，比較不能のものを等価と考えるとする（$A_1^k \fallingdotseq A_2^k$）．これにより，比較不能となったものは，他の属性値の大小関係により経路の優劣が決まることになる．

なお，A_1^k が A_2^k よりも小さくなる確率は $F(t)$ を $N(0, 1^2)$ の分布関数として，次式で計算できる．

$$Prob\{A_1^k < A_2^k\} = F\left(\sqrt{2}\left(\mu_2^k - \mu_1^k\right)\Big/\left(\sqrt{\nu_1^k} + \sqrt{\nu_2^k}\right)\right) \tag{11}$$

６．確率的属性を含んだ多目的最短路問題の例

確率的属性を含んだ多目的最短路問題の例として図２のような地域の危険物（トルエン）の輸送問題を考える．この地域は，Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄの４種類の道路から成立しており，ノードは異なった道路が交差していることを示す．ここでは，ノード１からノード４３への最短輸送路（非劣経路）を見つけることにする．このとき，目的として次の３つを設定する．

（Ⅰ）　輸送時間

（Ⅱ）　事故率

（Ⅲ）　コスト

（Ⅰ）と（Ⅱ）は確率的属性（確率分布）として（Ⅲ）は確定属性として扱う．輸送時間と事故率の各道路の平均，標準偏差は表１で，コストは［１］より，次式で与える．

（コスト（＄））　＝

２１．６７＊（平均時間（時間））

＋０．７１４＊（距離（マイル））　(12)

この問題を，多目的最短路問題のアルゴリズム［２］に［３］のルールと新しいルールを組み込んで実行する．第一段階比較ルール

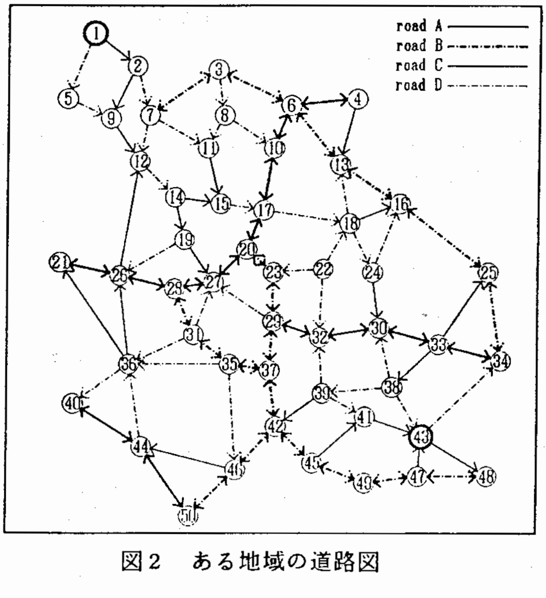

図２　ある地域の道路図

で選択された経路が表２である．ここから，第２段階比較ルール（p_0 ＝０．０１）で経路５が経路２に，経路８が経路３により削除される．

新ルールではα＝０で，第１段階比較ルールの結果に比べ，経路５，７，８が削除されている．さらに，α＝０．０２で経路６が経路９により削除され，α＝０．０６で経路４が経路２により削除される．経路の決定者は，この中より経路を選択することになる．

表1　各道路の時間と事故率の平均，標準偏差

	時間(min/mile)		事故率(1／百万·台·mile)	
道路	平均	標準偏差	平均	標準偏差
A	1.09	0.125	0.13	0.15
B	1.33	0.201	0.45	0.20
C	1.71	0.195	0.70	0.25
D	2.40	0.331	0.70	0.25

表2　第1段階比較ルールにより選択された経路

No		輸送時間 (平均, 標準偏差)	事故率 (平均, 標準偏差)	コスト
1	1- 2- 7-11-15-17-18-24-30-33-38-43	(40.33 , 1.223)	(12.82 , 1.079)	22.23
2	1- 2- 7-11-15-17-20-23-29-32-30-33-38-43	(35.55 , 1.067)	(10.38 , 0.998)	22.86
3	1- 2- 7-11-15-17-20-23-29-47-42-45-41-43	(35.50 , 1.065)	(12.04 , 1.043)	22.77
4	1- 2- 9-12-14-19-27-20-23-29-32-30-33-38-43	(35.35 , 0.971)	(11.21 , 1.036)	23.90
5	1- 2- 9-12-14-15-17-20-23-29-32-30-33-38-43	(35.81 , 1.014)	(11.06 , 1.029)	23.93
6	1- 2- 9-12-14-19-27-28-31-35-57-42-45-41-43	(35.21 , 0.970)	(12.89 , 1.078)	23.73
7	1- 2- 9-12-14-19-27-20-23-29-37-42-45-41-43	(35.30 , 0.969)	(12.87 , 1.079)	23.81
8	1- 2- 9-12-14-15-17-20-23-29-37-42-45-41-43	(35.76 , 1.012)	(12.73 , 1.072)	23.84
9	1- 2- 7-11-15-17-20-23-29-37-42-45-49-47-43	(35.26 , 1.079)	(11.63 , 1.025)	23.54
10	1- 2- 7- 3- 6-10-17-20-23-29-32-30-33-38-43	(34.71 , 0.977)	(9.47 , 0.975)	24.53
11	1- 2- 7- 3- 6-10-17-20-23-29-37-42-45-41-43	(34.66 , 0.976)	(11.13 , 1.021)	24.44
12	1- 2- 7- 3- 6-10-17-20-23-29-37-42-45-49-47-43	(34.42 , 0.991)	(10.72 , 1.002)	25.21

７．終わりに

本研究では，不確定な属性値を確率分布としてとらえ，多目的最短路問題へ組み込む方法を検討し，非劣経路を求めるアルゴリズムを提案した．

既存の方法では，不確定な属性値を確率分布としてとらえることにより，確定的なもの（不確定なものについては，その平均を確定値として考えたもの）としてとらえるよりも経路の選択の幅（非劣経路）を増やすことができた．しかし，第２段階比較ルールで削除できうる経路は，不確定な属性を確率的に考えることによって増えたものに他ならず，このルールを強力に使うと（p_0 を大きくとると），残る経路は確定的に考えたときの非劣経路になってしまい，確率分布の導入が効果的なものでなくなってしまう．

それにくらべて，今回新しく提案した方法では，不確定な属性値の大小を，直接的に比較しているので，『比較不能』とは『有為な差がない』ことであると自然に解釈できる．このことが，この比較ルールのポイントであり，確定的にとらえたときよりも経路の選択の幅をさらに減らすことができ，経路の決定者に，より踏み込んだ情報を提供することが可能となる．

【参考文献】

[1]Abkowtiz, M., Eiger, and Sirinivasan, S.:"Estimating the release rates and costs of transporting hazardous waste", Transportation Research Record, pp. 22-30, Vol. 977, 1984.

[2]Martins, E.Q.V.:"On a multi-creteria shortest path problem", European Journal of Operational Research, pp. 236-245, Vol. 16, no. 2, 1984.

[3]Wijeratne, Turnquist, and Mirchandani:"Multiobjective routing of hazardous matelials in stochastic networks", European Journal of Operational Research, pp. 33-43, Vol. 65, no. 1, 1993.