地域人口を考慮した配送拠点の配置問題

中村暁史（沼田一道助教授，桧垣正浩助手）

1．はじめに

施設配置問題は，さまざまな意思決定の場面において発生する問題である．この問題は特別な構造を持った混合整数計画問題として定式化され，古くからよく研究されている．今まで行われてきた研究を振り返ると，需要地が点で与えられている問題に対して多くの研究が行われているが，面で与えられる問題に対する研究はあまりみられない．しかし，現実問題として人口密度など面で与えられているものを需要と対応させなければならない問題も数多くみられ，このような種類の施設配置問題に対する研究が望まれている．

2．研究目的

本研究では需要地が面で与えられる施設配置問題の一例として，人口密度に比例した需要を考慮した施設配置問題の解法について考察する．また，問題として新宿区の実際の地図データ及び人口密度データを用いて，この問題を解くプログラムを作成し，実際問題への適用を試みることにより解法の有効性を示す．

3．施設配置問題

施設配置問題（Facility Location Problem;FLP）とは，以下のような問題である．

工場などいくつかの供給施設の建設候補地と需要地があり，各候補地の処理能力（供給可能量），建設に関わる費用，及び各需要地の需要量が与えられ，さらに各候補地から各需要地への製品1単位あたりの輸送費用が与えられているとする．このとき，施設の処理能力を超えない範囲で，各候補地からすべての需要地の需要量を満足するように製品などを輸送することを考える．ここで，施設の建設に関わる費用や輸送費用などの総和が最小になるような施設の建設地と製品の輸送計画を求める問題である．

4．施設配置問題の定式化

施設配置問題では，以下のような条件が与えられている．

条件

- 施設の建設候補地が m カ所ある．
- i 番目の候補地を $W_i(i=1,\cdots,m)$ とし，その処理能力を a_i，その建設経費を d_i とする．
- 需要地が n カ所ある．
- j 番目の需要地を $D_j(j=1,\cdots,n)$ とし，その需要量を b_j とする．
- W_i から D_j への製品1単位あたり輸送費用を c_{ij} とする．

以上の条件において，すべての需要を満たし，かつ総費用を最小にする施設の建設地と輸送計画を求めることが施設配置問題の目的である．

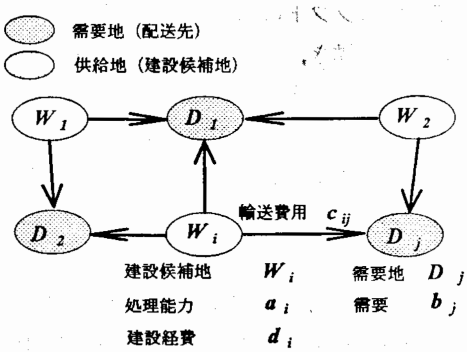

図1．施設配置問題のネットワークモデル

まず，W_i に配送拠点を建設するかどうかを示す 0-1 変数 y_i を導入する．

$$y_i = \begin{cases} 1, & W_i \text{に施設を建設するとき} \\ 0, & W_i \text{に施設を建設しないとき} \end{cases} \tag{1}$$

そして W_i から D_j への輸送量を x_{ij} とすると，施設配置問題は次のような混合 0-1 整数計画問題として定式化できる．

$$(P_0)\begin{cases} \text{最小化} \quad z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} d_i y_i & (2) \\ \text{条件} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,\cdots,n & (3) \\ \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i y_i, \quad i = 1,\cdots,m & (4) \\ \qquad x_{ij} \ge 0, \quad i = 1,\cdots,m; \quad j = 1,\cdots,n & (5) \\ \qquad y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\cdots,m & (6) \end{cases}$$

この問題(P_0)は，分枝限定法を用いて効率的に解くことができる[1]．

5．本研究で取り扱う施設配置問題

ある企業が，新宿区内の各地区に配送する宅配便の配送拠点を同区内に建設する計画を立てている場面を想定する．その際に，定式化で述べた条件の他に以下の条件をつけ加える．

・需要量は人口密度に比例し，またその地域に一様に発生していると考える．

・輸送にかかる費用は候補地と需要地の距離に比例する．

以上の条件において，すべての需要を満たし，かつ総費用（輸送費用＋建設経費）を最小にする配送拠点の建設地と輸送計画を求めることを目的とする．その際に，日本地図センター発行の数値地図表示・閲覧ソフトにおいて使用されている新宿区の地図データをもとに地図を描き，その地図上に人口密度との関係が分かりやすいように結果を表示する．また人口密度は，参考文献［3］より 1993 年の新宿区の町丁別の人口を参考に作成したものを使用し，図２のように地図をメッシュに区切って考え，そのメッシュ単位で人口が与えられているものとする．

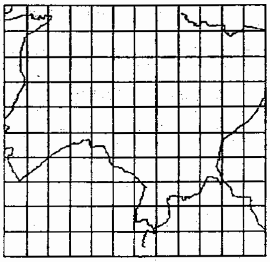

図２．新宿区の地図

6．解法

本研究で考察する問題の条件のもとで，建設候補地から需要地までの輸送費用を需要地内の各点からの平均距離で与える．すなわち需要地に 100 個の需要の発生する点をランダムに発生させ，その点と建設候補地との距離 $E_l(l=1,\cdots,100)$ を求めて，その平均の値を輸送費用 c_{ij} とした．

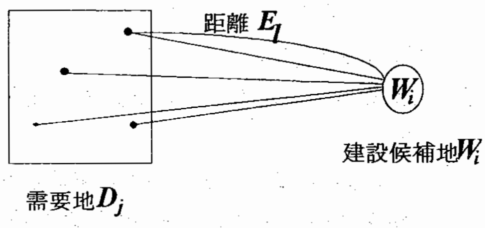

図３．モンテカルロ法を用いた費用の計算

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{100} E_l / 100 \tag{7}$$

そのうえで先に定式化した（P_0）の最適解を，つぎのように求める．

準備．　あらかじめ，（P_0）の（６）式を連続に緩和した問題$(\overline{P}_0)$を生成する．この$(\overline{P}_0)$は輸送問題となり，プライマル・デュアル法のアルゴリズムを用いて最適値$\bar{z}_0$を求めることができる．（P_0）の最適値zと$\bar{z}_0$との間には$z \geq \bar{z}_0$の関係があり，このことを利用して施設配置問題（P_0）の最適解を効率的に求める．

その際，以下のものを定義する．

s_p^+；第p子問題（P_p）においてy_i=1に固定されている候補地の集合．

s_p^0；第p子問題（P_p）においてy_i=0に固定されている候補地の集合．

$\mathbf{y}$；i番目の要素がy_iのベクトル．

ｽﾃｯﾌﾟ１．暫定値$\tilde{z} = \infty$，問題の集合$\eta = \{(P_0)\}$，p=1，$s_p^+ = s_p^0 = \varnothing$とする．

ｽﾃｯﾌﾟ２．$\eta = \varnothing$ならば，ｽﾃｯﾌﾟ１２へ．

ｽﾃｯﾌﾟ３．ηから問題（P_p）を取り出し，その連続緩和問題$(\overline{P}_p)$を解き，最適値を$\bar{z}_p$，最適解を$\bar{\mathbf{y}}$とする．

ｽﾃｯﾌﾟ４．$\bar{z}_p \geq \tilde{z}$ならば，ステップ２へ戻る．

ｽﾃｯﾌﾟ５．$\bar{\mathbf{y}}$が整数解ならば，$\tilde{z} = \bar{z}_p$，$\tilde{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}}$として，ステップ２へ戻る．

ｽﾃｯﾌﾟ６．$\bar{\mathbf{y}}$の中でy_iが小数の候補地ついてそれぞれy_iを０もしくは１に固定して最適値$z_i(0)$，$z_i(1)$を求める．

ｽﾃｯﾌﾟ７．それぞれの候補地について$|z_i(0)-z_i(1)|$を計算し，その値が最大の候補地を分枝する候補地とする．

ｽﾃｯﾌﾟ８．$z_i(0)>z_i(1)$ならば，$\bar{z}_{p+2}=z_i(1)$，$\bar{z}_{p+1}=z_i(0)$，$s_{p+2}^+ = s_p^+ \cup \{i\}$，$s_{p+2}^0 = s_p^0$，$s_{p+1}^+ = s_p^+$，$s_{p+1}^0 = s_p^0 \cup \{i\}$として，ｽﾃｯﾌﾟ１０へ．

ｽﾃｯﾌﾟ９．$\bar{z}_{p+2}=z_i(0)$，$\bar{z}_{p+1}=z_i(1)$，$s_{p+2}^+ = s_p^+$，$s_{p+2}^0 = s_p^0 \cup \{i\}$，$s_{p+1}^+ = s_p^+ \cup \{i\}$，$s_{p+1}^0 = s_p^0$とする．

ｽﾃｯﾌﾟ１０．$\eta = \eta \cup \{(P_{p+1}),(P_{p+2})\}$とする．

ｽﾃｯﾌﾟ１１．$p=p+2$としてｽﾃｯﾌﾟ２へ．

ｽﾃｯﾌﾟ１２．$\tilde{z} = \infty$ならば問題(P_0)には実行可能解が存在しない．そうでないならば，$\tilde{\mathbf{y}}$が(P_0)の最適な施設の建設地，$\tilde{z}$が(P_0)の最適値である．

７．数値実験

本研究で考察した施設配置問題の解法を用いて，コンピュータによる数値実験を試みた．ここに，そのうちの実験 No.1 についてまずその条件と結果を示す．尚，使用したプログラミング言語はマイクロソフト社の Visual Basic Ver 2.0，また使用したハードウェアは PC9821Cs2 である．

（実験 No.1）

建設候補地の数を９カ所，新宿区内の任意の位置に配置し，そのうち最低５カ所に施設を建設すれば新宿区内の全需要をまかなうことができるという条件で行った．最終的に１時間１４分４９秒の実行時間で図４のような結果を得た．

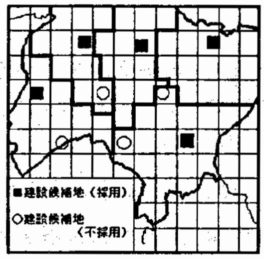

図４．No.1 の実行結果

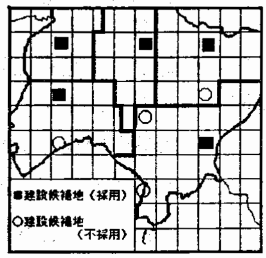

図５．No.4 の実行結果

また，上記の実験の他にメッシュ数，建設候補地数，最少建設数を変えて実行したときのそれぞれの実行時間を表１に示す．No.1 は先に行った実験であり，No.4 は同一条件のもとで候補地の位置を変えたものである．表１より候補地数やメッシュ数を変えれば，当然実行時間に差が生じるが，同じ条件であっても No1 と No4 のように実行時間に大きな差が生じることがわかった．一般的に分枝限定法を用いると，問題の規模が同じでも数値によって実行時間に差が生じると言われているが，本実験においても同様の事実が確認された．

表１．実行時間の比較

No	ﾒｯｼｭ数	候補地数	最少建設数	実行時間(h;m;s)
1	10×12	9	5	１；１４；４９
2	5× 6	9	5	０；０８；１２
3	10×12	6	3	０；３５；５４
4	10×12	9	5	２；０６；１８

８．終わりに

本研究では，需要が面で与えられている施設配置問題の一解法を提案し，実現した．人口密度を考慮にいれるために，需要を人口密度に，また輸送費用を需要の発生している地域との距離に対応させて問題を解いたが，最終的に実行時間の面では実用的な時間で解を求めることができ，また解の表示では人口密度と対比して非常に分かりやすいシステムであると考えている．

数値実験では各候補地の建設経費や処理能力をすべて等しく設定して問題を解いたが，現実の問題ではその候補地の配置場所により異なる．たとえば建設経費ならばその候補地の地価などと関係してくるであろう．本解法及び作成したプログラムは，このような問題にも対応できる．

最後に，数値実験では１時間以上の実行時間を費やしたが，さらに規模が大きな問題を考えると，本研究では用いなかったがラグランジュ緩和などのアルゴリズムを用いることにより，さらに効率よく最適解を求めることが課題となる．

＜参考文献＞

［１］今野浩，鈴木久敏：“整数計画法と組み合わせ最適化”
ORライブラリ第７巻，日科技連出版社，1982.

［２］桧垣正浩：“種種の施設配置問題に対する分枝限定法による解法”
博士論文，1991.

［３］“住民基本台帳による東京都の世帯と人口（町丁別，年齢別）”
東京都総務局統計部人口統計課，1994.