

# 入出力間の相関を考慮したDEA —領域限定法の適用—

(著者) 中村 治由 (沼田一道助教授, 桧垣正浩助手)

## 1. はじめに

DEA (Data Envelopment Analysis) は, 複数種類の資源を入力 (投入) し, 複数種類の便益を出力 (回収) する多入力多出力系の事業体 (Decision Making Unit : DMU) の事業効率を相対的に評価する分析方法の一つである. DEAでは, (重み付き出力和) / (重み付き入力和) を最大化し, その最大値を効率値とする. その時, 入力と出力を独立したものと考え, 各DMUの特徴を生かすよう入出力項目の重み (ウェイト) 付けを行っている.

効率値を求める際, “個性的な活動” を評価するという立場では, 各DMUが自由に重み付けを行うのは妥当と思われる. しかし, 分析対象がチェーンレストランであるような場合, 各店舗の責任者がいる程度の独立した権限を持ち運営しながらも, どの店舗も同種類の品揃え, 同質なサービスを不特定多数の客に提供する事を目指している. そのため, DEAによる分析で効率的と判断された店舗であっても, あまりに個性の強い店舗はチェーンレストランの一店舗としては望ましくない. また, 実際には入出力間には何らかの相関関係が存在し, 両者は必ずしも独立であるとは言いきれない.

そこで, 本研究では従来のDEAの制約式に入出力間の相関関係を考慮した制約式を追加する事によって, 各DMUの取りうる各入出力項目の重み付けを制限したDEAを提案し, 実際のデータに適用してその有効性を検討する. また, 本研究で提案するDEAの一連の計算を自動的に行うため, Visual basic 2.0j によるDEAシステムを作成する.

## 2. DEAの概要

DEAにおいて分析対象とされる各DMUには, 同種の入力項目 (人件費, 食材費, 光熱費, など) と同種の出力項目 (来客数, 売上高, など) が複数存在し, それぞれ常に正値をとる. ここでは  $n$  個のDMU $_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) について  $m$  個の入力項目と  $k$  個の出力項目を選び, DEAによる効率分析を行う. DMU $_j$  の入力データを  $x_{ij}$  ( $i=1, \dots, m$ ), 出力のデータを  $y_{rj}$  ( $r=1, \dots, k$ ) とする.

対象とするDMU群の生産可能性集合  $F$  を, 各DMUの活動データ ( $x_{ij}, y_{rj}$ ) を基にパラメータ  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  を用いて次のように定義する.

$$F = \{(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) \mid x_i \geq \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j, y_r \leq \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j, \lambda_j \geq 0, x_i \geq 0, y_r \geq 0, \\ (i=1, \dots, m; r=1, \dots, k; j=1, \dots, n)\}$$

DEAでは, 分析対象であるDMUが  $F$  に属する条件のもとで, 入力を現在の値より縮小できるか (入力最小化モデル), または, 出力を現在の値より拡大できるか (出力最大化モデル) でD効率的であるか判断する. また, 生産可能性集合  $F$  の定義において上のように  $\lambda$  に非負制約のみを課したモデルはCCR (Charnes-Cooper-Rhodes)モデルと呼ばれている. 本研究ではこのモデルを採用する.

$F$  で表される生産可能性集合の境界面を効率的フロンティアと呼び, DMU $_o$ の活動 ( $x_{io}, y_{ro}$ ) がこの境界面上にあるとき, DMU $_o$ をD効率的なDMUと呼ぶ.

あるDMUがD効率的であるか否かは次のように判別する. まず, 分析対象を代表的にDMU $_o$ とする. DMU $_o$ の活動が生産可能性集合に属した状態で現在の出力値を保ちつつ, 入力値を最小化する線形計画問題 (入力最小化モデル) を定式化し, これを[LPO]とする.

$$\begin{array}{l}
\text{第一目的関数} \quad \min \quad z_1 = \theta \\
\text{第二目的関数} \quad \max \quad z_2 = \sum_{i=1}^m s_i^x + \sum_{r=1}^k s_r^y \\
\text{[LPO]} \quad \text{sub.to} \quad \theta x_{i_0} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^x = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (s_i^x : \text{入力のスラック変数}) \\
\quad \quad \quad \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^y = y_{r_0} \quad (r = 1, \dots, k) \quad (s_r^y : \text{出力のスラック変数}) \\
\quad \quad \quad \lambda_j, s_i^x, s_r^y \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, m; r = 1, \dots, k)
\end{array}$$

第一目的関数を用いた [LPO] の最適値  $\theta$  を D 効率値と呼び、 $\theta = 1$  のとき、DMU $_o$  を 相対効率的な DMU と呼ぶ。しかし、ある  $\lambda$  に対して入力の余剰、あるいは出力の不足が存在する場合、そのような DMU $_o$  は真に効率的とはいえない。この入出力の過不足は、[LPO] ではスラック変数  $s_i^x$  と  $s_r^y$  の和から成る第二目的関数を用いて検出する。

そこで、第一目的関数を用いた [LPO] で最適目的関数値  $\theta = 1$  をとり、入出力の過不足が生じない DMU を D 効率的な DMU と呼ぶ。逆に  $\theta < 1$ 、または  $\theta = 1$  であっても入出力項目の過不足が生じるような DMU $_o$  を D 非効率的な DMU と呼ぶ。

さらに、[LPO] の最適解  $\lambda_j^*$  を用いて以下の  $E_o$  に属する活動を DMU $_o$  の参照集合 とする。

$$E_o = \{j \mid \lambda_j^* > 0; j = 1, \dots, n\}$$

[LPO] の双対問題 [LPD] は、双対変数 ( $v_i, u_r$ ) を用いて次のように定式化される。

なお、[LPD] で用いられる  $v_i$  は入力にかかるウェイト、 $u_r$  は出力にかかるウェイト、 $s_j$  は、スラック変数である。

$$\begin{array}{l}
\text{第一目的関数} \quad \max \quad w_1 = \sum_{r=1}^k y_{r_0} u_r \\
\text{第二目的関数} \quad \max \quad w_2 = \sum_{j=1}^n s_j \\
\text{[LPD]} \quad \text{sub.to} \quad \sum_{i=1}^m x_{i_0} v_i = 1 \\
\quad \quad \quad \sum_{r=1}^k u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + s_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \\
\quad \quad \quad v_i, u_r, s_j \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; r = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n)
\end{array}$$

### 3. 本研究で提案する DEA の定式化

本研究では、チェーンレストランの各店舗を DMU とし、各 DMU の事業効率性を相対的に評価する。チェーンレストランでは、同種類の品揃え、同質なサービスを不特定多数の客に提供することを志向する。そのため、各店舗が個性を持つことを避け、むしろ均一化を目指す。しかし、従来の DEA では、各 DMU の特徴を生かした“個性的な活動”を高く評価してしまう。そのため、従来の DEA での効率性の分析では、チェーンレストランの経営方針を考慮していない。

このような場合に、領域限定法をもとに入力にかかるウェイトの存在領域を制限した DEA を適用する。本研究で提案する DEA は、個性的な活動を無制限に認めていない。従って、チェーンレストランの経営方針をより考慮した効率性分析が実現される。

本研究では、入力が出力に与える影響の大きさを判断する指標として相関係数を用い、入力にかかるウェイトの存在領域を、出力に与える影響に応じて以下のような指針で制限する。

- 1) 出力に与える影響の小さい入力項目については、大きなウエイトをかけることを避ける。
  - 2) 出力に与える影響の大きい入力項目については、小さなウエイトをかけることを避ける。
- この制限を考慮した制約式を追加したDEAを「LPD'」として定式化する。

「LPD'」の(\*)式で使用するMは1以上の定数で入力にかかるウエイトの取り得る範囲を制限している。また、 $\rho_{ir}$ はi番目の入力とr番目の出力の相関係数、 $\bar{x}_i$ は、i番目の入力の平均値である。

$$\begin{aligned}
 & \text{第一目的関数} \quad \max \quad w_1 = \sum_{r=1}^k y_{r,o} u_r \\
 & \text{第二目的関数} \quad \max \quad w_2 = \sum_{j=1}^n s_j \\
 & \text{sub.to} \quad \sum_{i=1}^m x_{i,o} v_i = 1 \\
 & \sum_{r=1}^k u_r y_{r,j} - \sum_{i=1}^m v_i x_{i,j} + s_j = 0 \quad (j=1, \dots, n) \\
 & \frac{1}{M} \sum_{r=1}^k \rho_{or} \leq \frac{v_o \bar{x}_o}{v_p \bar{x}_p} \leq M \sum_{r=1}^k \rho_{or} \quad (o=1, \dots, m-1; p=o+1, \dots, m) \cdots (*) \\
 & \sum_{r=1}^k \rho_{pr} \quad (i=1, \dots, m; r=1, \dots, k; j=1, \dots, n) \\
 & v_i, u_r, s_j \geq 0
 \end{aligned}$$

#### 4. 適用

##### 4. 1. 使用するデータ

北関東を中心に営業活動を行っているチェーンレストランの12店舗の営業成績について分析を行う。データは、平成6年度のデータを用い、入力を食材費(千円)、人件費(千円)、光熱費(千円)、変動費(千円)、出力を来客数(人)、売上高(千円)とし、分析に利用したデータを表1に示す。

表1. 分析に利用した入出力データ

店舗	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
食材費	74360	62273	65461	104414	115232	67981	58953	95938	68412	136048	78727	76595
人件費	42796	35736	39490	56139	55194	46824	41982	52742	39186	60985	40323	48203
光熱費	5941	5692	5843	5843	7398	5815	5525	7941	5124	7367	6557	5993
変動費	14319	10304	16728	15728	16421	14079	16099	17462	13312	19739	12905	18242
来客数	140769	110495	119615	160495	179124	139654	107921	190400	117544	215426	132054	132086
売上高	185200	150780	158500	230600	254800	184600	142254	244400	160800	305200	189200	184464

##### 4. 2. DEAによる分析

従来のDEAでの分析結果とD効率の判断されたDMUについて、参照集合に取り上げられた回数を表2に示す。この中でB、Eは、それぞれ自分自身の参照集合となっているが、他の店舗の参照集合とはなっていない。このことから、両店舗は、それぞれ個性的な活動を行っていると考えられる。逆に、参照集合に取り上げられている回数の多い店舗は、標準的で優れている店舗であると考えられる。

表2. 従来のDEAによる分析結果と参照集合とされた回数

店舗	D効率値	参照集合	回数	店舗	D効率値	参照集合	回数
A	0.9746	F,H,J	-	G	0.8911	F	-
B	1	B	1	H	1	H	4
C	0.9336	F,H,K	-	I	0.9419	F,H,J,K	-
D	0.9727	F,J	-	J	1	J	5
E	1	E	1	K	1	K	4
F	1	F	6	L	0.9854	F,J,K	-

#### 4. 3. 領域限定法を適用したDEAによる分析

表1のデータの、各入力と出力との相関係数とその和を表3に示す。[LPD'] (\*) 式は、相関係数の和の大きさによって入力にかかるウェイトを制限している。表3より、その大きさは、食材費、人件費、光熱費、変動費の順になっており、他の項目に比べ食材費が最も重要視され、変動費が最も軽視される。

本研究で定式化した[LPD']を用い、(\*)式のMの値を100としたときの分析結果を表4に、Mを10としたときの分析結果を表5に示す。

表3. 入出力間の相関係数とその和

	来客数	売上高	和
食材費	0.9386	0.9801	1.9187
人件費	0.9090	0.9237	1.8327
光熱費	0.8395	0.8049	1.6444
変動費	0.6375	0.6183	1.2558

表4. 領域限定したDEAによる分析結果(M=100) 表5. 領域限定したDEAによる分析結果(M=10)

店舗	D効率値	参照集合	店舗	D効率値	参照集合
A	0.9745	F,H,J	G	0.8854	F
B	0.9971	H,J,K	H	1	H
C	0.9281	F,H,K	I	0.9415	F,J,K
D	0.9667	F,J	J	1	J
E	1	E	K	1	K
F	1	F	L	0.9539	F,K

表2と表4を比較すると、表2でD効率的であったBが表4では、D非効率的となった。表5ではさらに、EがD非効率的となった。また、表4と表5の各DMUのD効率値、参照集合に示されるように、(\*)式のMの値によって分析結果は変化する。そこで参考として、Mを1から1000まで変化させたとき各DMUがD効率的となった回数を表6に示す。

表6より、E、H、J、Kがほとんどの場合でD効率的となり、制約に左右されない真に優れた店舗であると考えられる。また、従来のDEAではD非効率的とされたDが数回ではあるがD効率的となった。

表6. M=1~1000でD効率的と判断された回数

店舗	B	D	E	F	H	J	K
回数	77	3	971	208	1000	998	1000

#### 5. 終わりに

チェーンレストランの各店舗の相対的な事業効率の分析の際、従来のDEAでは、個性を高く評価し、各入出力項目間を独立なものとして扱う。そのため、チェーンレストランの経営方針を考慮した分析とはならない。そこで本研究では、領域を限定したDEAを提案、適用し、従来のDEAと比較した。

その結果、従来のDEAでD効率的であったDMUが、提案するDEAでは、D非効率的となる事があった。また、従来のDEAでD非効率的とされたDMUのD効率値が低下するだけでなく、逆に増加する場合もあり、D効率的と評価されたDMUも存在した。これらのことから、提案するDEAが、“各DMUの個性的な活動”を制限した評価を与えているので、有用であると言える。

しかし、我々の提案したDEA(一般に領域限定法)では、定数Mの値によって分析結果が変化する。そのためMの決定が非常に重要な問題となり、決定に当たっては表6での結果を含め、様々なMでの分析結果とともに、経営方針をよく検討した上で決定すべきである。

#### 【参考文献】

- [1] 刃根 薫：“経営効率性の測定と改善 一包絡分析法DEAによる一”，日科技連1994.
- [2] 刃根 薫：“DEAのモデルをめぐって”，オペレーションズ・リサーチ，vol.1,pp34-35(1993).
- [3] 橋本 明洋：“DEAによる野球打者の評価”，オペレーションズ・リサーチ，vol.3,pp146-153(1993).