二回配送在庫モデルにおける最適配送時期と最適配分量

佐藤 勝紀（沼田 一道 助教授，檜垣 正浩 助手）

1．はじめに

製造・販売を営む企業にとって、製品の在庫をどこにどれだけ持つかは、効率的な経営を行う上で極めて重要な問題である。各地域ごとに配置された販売店（m店舗）には、日々発生する需要に応えるため、ある程度の在庫が必要である。しかし、ある期間（計画対象のＨ日間）の需要を賄う予定の生産量全部を、各販売店に全て分配してしまうのは、在庫費用が大きくなり得策ではない。そこで計画期間の最初に、全生産量の一部を全販売店共通の予備在庫として倉庫に残し、残りを各販売店に分配する。そして計画期間のある時点（t_1日めの終わり）で、各販売店の在庫状況を把握した上で、倉庫に保管してある予備在庫を再配分することが考えられている。
この方式は二回配送（１，ｍ）型在庫モデルと呼ばれ研究が行われている[1]。

2．研究目的

二回配送（１，ｍ）型在庫モデルでは、次のようなことが問題となる。

①製造所の製品を販売店と倉庫にどのように割り振るか。

②倉庫から販売店への最適補充時期（二回目配送）はいつか。

③二回目配送において、各販売店に予備在庫をどう配分するか。

圓川ら［１］は、各販売店の初期在庫量$Q_i = H\mu_i$、予備在庫$I_c = 2\sqrt{\sum_1^m H\sigma_i^2}$を固定した上で、計画期間内の期待欠品数を最小にする最適割付けルールを理論的に求め、最適な二回目配送時期を探索している。そこでは、主として②、③が扱われ、①については議論がなされていない。

そこで本研究では、製品の初期在庫量を問題とする。具体的には、「[1]の配分ルールに従う時ほとんど欠品が生じない」という条件を満たす初期在庫量と予備在庫量及び最適二回目配送時期を、パソコンを用いたシミュレーションによって求める。また、同時に、計画期間終了時の製品の残品数についても考察する。

3．二回配送（１，ｍ）型モデル

二回配送（１，ｍ）型モデルは、図１に示すように、一つの倉庫とｍ個の販売店を有するモデルである。製品の販売計画はＨ日ごとに行い、毎計画期間の最初に製造所から各販売店へQ_i（各販売店の初期在庫量）の製品を直接配送する。同時に、予備在庫I_cを倉庫に保管する。そして期間中のある時点（$t = t_1$）で倉庫にある予備在庫を適当な割付けルールでもって、販売店に再配分する。図２に販売店での平均的な在庫の推移を示す。
さらに、次のような仮定を置く。

（１）$t = t_1$において倉庫の予備在庫を再配分する際、販売店間における横持ち配送を認める。

（２）製品の移動に要する時間は無視する。

（３）各販売店での単位時間（一日）当たりの需要量は、それぞれ独立に、平均μ_i，標準偏差σ_iの正規分布に従う。

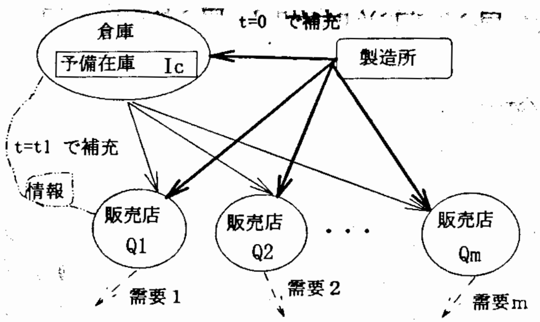

図1　二回配送（1，m）型モデル

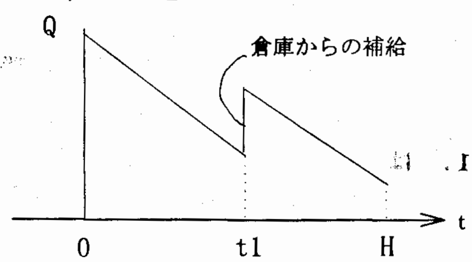

図2　販売店における在庫の推移

4．二回配送（1，m）型モデルにおける期待欠品数

計画期間内の期待欠品数を［1］に従って計算する。まず、一期間における期待欠品数をRとして、二回目の配送前（前半）とその後（後半）に分けて考える。

R（0≤t≤H）＝R（0≤t≤t_1）＋R（t_1＜t≤H）・・・・・・・・・・・・（1）

4．1 前半の欠品数

前半の欠品数R（0≤t≤t_1）は、初期在庫がQ_iである時の販売店におけるt_1日目までの期待欠品数である。t_1日目までの各販売店での需要量の分布は、平均$t_1\mu_i$，標準偏差$\sqrt{t_1}\sigma_i$ の正規分布に従う。これより、欠品の生じる確率$P_r\{x_i \ge Q_i\}$は次のようになる。

$$P_r\{x_i \ge Q_i\} = \int_{Q_i}^{\infty} f(x_i)dx_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t_1}\sigma_i}\int_{Q_i}^{\infty}\exp[-\frac{(x_i - t_1\mu_i)^2}{2t_1\sigma_i^2}]dx_i$$

$u = \frac{x_i - t_1\mu_i}{\sqrt{t_1}\sigma_i}$，$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp[-\frac{u^2}{2}]$とおくと、$P_r = \int_{q_i}^{\infty}\phi(u)du$となる。$\phi(u)$は標準正規分布の密度関数である。これより、前半の期待欠品数R（0≤t≤t_1）は、

$$R_i(0 \le t \le t_1) = \sqrt{t_1}\sigma_i G(q_i) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（2）$$

と書ける。（但し、$G(q_i) = \int_{q_i}^{\infty}(u - q_i)\phi(u)du,\ q_i = (Q_i - t_1\mu_i)/\sqrt{t_1}\sigma_i$）

4．2 後半の欠品数

各販売店の補充直前の在庫量をI_iとすると、I_iは、平均$Q_i - t_1\mu_i$，標準偏差$\sqrt{t_1}\sigma_i$ の正規分布に従う（確率密度関数を$f_i(I_i)$とする）。各販売店への二回目の配送量をΔiとすると、第i販売店の後半の期待欠品数は、次のようになる。（但し、$\tau = H - t_1$）。

$$R_i(t_1 \le t \le H) = \int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\tau}\sigma_i G(\frac{I_i + \Delta i - \tau\mu_i}{\sqrt{\tau}\sigma_i}) f_i(I_i)dI_i \cdots\cdots\cdots\cdots（3）$$

I_iは互いに独立としているので、全販売店にわたる後半の期待欠品数は、次のようになる。

$$R(t_1 \le t \le H) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i=1}^{m}\sqrt{\tau}\sigma_i G(\frac{I_i + \Delta i - \tau\mu_i}{\sqrt{\tau}\sigma_i}) f_1(I_1)\cdots f_m(I_m)dI_1\cdots dI_m \cdots（4）$$

4．3 最適割付けルール

総欠品数（1）を最小にする二回目の各販売店への配送量を決める。（2）式がI_cの割付けと無関係であるから、（4）式を最小にするような各販売店への配送量Δiを求めれば良い。実際に

二回目配送を行うとき、I_iは確定しているのであるから、I_iを所与の値としてI_cの配分を考える。この問題は、$\sum_{i=1}^{m} \Delta i = I_c$の下で、（4）式の被積分関数$\sum_{i=1}^{m} \sqrt{\tau}\sigma_i G(\frac{I_i + \Delta i - \tau\mu_i}{\sqrt{\tau}\sigma_i})$を最小にする$\Delta i$を求めることである。これはラグランジュの未定乗数法で解くことができ、最適配分量は次のようになる。

$$\Delta i = \frac{\sigma_i}{\sum_{j=1}^{m} \sigma_j}(I_c + \sum_{i=1}^{m} I_i - \sum_{j=1}^{m} \tau\mu_j) + \tau\mu_i - I_i \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

即ち、$t = t_1$における販売店・倉庫の全在庫量から、各販売店の後半の平均部分の総和$\sum_{j=1}^{m} \tau\mu_j$を差し引き、各販売店とも平均分を確保した上で、残りを標準偏差の構成比で分割したものが最適割付けルールである。この式から補充後の各販売店の在庫量$I_i + \Delta i$は、$\sum_{i=1}^{m} I_i$だけに依存することが分かる。

4．4 総期待欠品数

上記の割付けルールに従うとき、総期待欠品数(1)は最小となる。(4)式に(5)式を代入して、$I_1, I_2 \cdots I_m$の分布に関する期待値を取り、(2)式と加え合わせると次のようになる。

$$\begin{aligned}
&R\ (0 \le t \le H) \\
&= R\ (0 \le t \le t_1) + R\ (t_1 < t \le H) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sqrt{t_1}\sigma_i G(\frac{Q_i - t_1\mu_i}{\sqrt{t_1}\sigma_i}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\tau}\sigma_i G(\frac{I_i + \Delta i - \tau\mu_i}{\sqrt{\tau}\sigma_i}) f_1(I_1) \cdots f_m(I_m) dI_1 \cdots dI_m \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sqrt{t_1}\sigma_i G(\frac{Q_i - t_1\mu_i}{\sqrt{t_1}\sigma_i}) + \sqrt{\tau(\sum_{i=1}^{m}\sigma_i)^2 + t_1(\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2)} \times G(\frac{I_c + \sum_{i=1}^{m}(Q_i - H\mu_i)}{\sqrt{\tau\ (\sum_{i=1}^{m}\sigma_i)^2 + t_1\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2}}) \cdots (6)
\end{aligned}$$

これを、t_1=0, 1, $\cdots$H-1について計算することにより、Rを最小にする二回目配送時期t_1^*を求めることができる。（G(·) の計算にはHastingsらの近似式[2]を用いる。）

5． 数値実験及び結果

全生産量を$\alpha\sum_{i=1}^{m} H\mu_i$（販売店分）$+\beta\sqrt{\sum_1^m H\sigma_i^2}$（倉庫分）として、以下の数値実験を行う。

①初期在庫率α＝1.0、予備在庫率β＝2.0とし、(5)式を用いて、最適配送時期t_1^*と期待欠品数Rの関係を調べる。

②αを変化させ、期待欠品数がほぼ１になるβ及び最適配送時期をシミュレーションによって調べる。

このとき、計画期間の長さH＝12とし、需要は表１に従う。

表１　需要の条件

変数	店１	店２	店３
μ_i	６０	５０	４０
σ_i	１８	１５	１２

この数値は変動係数（$\theta = \sigma_i / \mu_i$）が0.3の場合である。

5．１ 最適配送時期t_1^*と期待欠品数Rの関係

①の結果が表２である。これより、Rを最小にする配送時期は、$t_1^* = 9$である。そして$t_1 = 0$は、各販売店が最初から予備在庫を持つことに相当する。この時の期待欠品数は、二回最適配送の場合と比較して約４倍であることが分かる。

表２　t_1とRの関係

t_1	R	t_1	R	t_1	R
0	9.30	4	5.96	8	2.97
1	8.44	5	5.17	9	2.34
2	7.60	6	4.40	10	2.64
3	6.77	7	3.67	11	13.53

5. 2 欠品数がほぼ1になる在庫率

在庫費用やスペースの問題で、初期在庫を一期間分だけ販売店に置くことが困難な場合がある。この時、欠品数を一定範囲に押さえるには、より多くの予備在庫を用意しなければならない。そこで、②を問題とする。 6,000回のシミュレーションを行った結果が、表3である。欠品を無くすためには、初期在庫量が少ない程、より早い時期により多くの予備在庫を補給しなければならない。早く補給すると、その後の期間が長くなるので無駄な在庫が生じる。

表3 二つの在庫率とt_1^*の関係

α	初期数	β	予備数	残存数	t_1^*
1.1	1980	0.16	16	201	9
1.0	1800	2.13	200	186	9
0.9	1620	4.45	420	227	8
0.8	1440	7.10	657	282	7
0.7	1260	9.22	857	290	6
0.6	1080	11.27	1049	304	5
0.5	900	13.52	1240	327	4

表3によれば、生産量と残存量の差から販売数は同じなので在庫量だけを考えた場合、初期在庫を多く持つほど、残存数が少なくなり有利である。だが、α=1.1になると残存量は増加に転じる。これより、5.1の初期在庫量は、残存数の逓増逓減の境に当たる。また、費用面を考えると初期在庫＝一期間分が有利とはいえない。一般に販売店よりも倉庫の方が、保管費用が安いからである。

最後に変動係数を変化させて、需要の変化に伴う最適配送時期t_1^*の変化を調べる。先の数値実験では、変動係数は$\theta = \sigma_i / \mu_i = 0.3$であった。今度は標準偏差の大きさを変えることにより、θの値を変化させる。在庫率は、α＝1.0として、欠品数がほぼ1になるようβを決める。その結果が表4である。これより、変動係数が大きくなると最適配送時期が早まること、変動係数の増加率に対する予備在庫率の増加率は減少する傾向にあることが分かる。

表4 変動係数とt_1^*の関係

θ	β	t_1^*	θ	β	t_1^*
0.6	2.77	7	0.3	2.13	9
0.5	2.58	8	0.2	1.79	10
0.4	2.45	9	0.1	1.31	11

6. 結論

以上、販売店の初期在庫を初期在庫率αで、欠品を1にする倉庫の予備在庫を予備在庫率βで増減させることで、次のことが明らかになった。

1. 欠品がほとんど生じない状態にするには、初期在庫が少ないほど補充時点が早くなる。補充時点が早いほどその後の期間が長くなるので、予備在庫が多くなり、結果として残品数が多くなるので不利なこと。
2. 変動係数の増加に伴い、最適配送時期が早まること。そして変動係数の増加率に対する予備在庫率の増加率は減少する傾向にあること。

最後に、本研究では、初期在庫が多いほど有利であるという結果が得られたが、これは費用面を考えていない。企業の目的は利益をあげることであり、在庫管理もその手段である。よって今後は、価格や費用を加味した、より高度なモデルが望まれる。

参考文献

［1］圓川隆夫：「二回配送プッシュコントロール方式における補充ルールに関する研究」，日本経営工学会誌 Ｖｏｌ．４２，Ｎｏ．４，ｐｐ．２３８－２４３，１９９１．

［2］大野豊他：「数値計算ハンドブック」，オーム社，１９９０．