少数銘柄への効率的な分散株式投資

辻 博康，吉田 昌弘（沼田 一道助教授，桧垣 正浩助手）

1．はじめに

手持ち資金の目減りを防ぎ，積極的に利得を追求する資金運用方法の一つに株式投資がある．投資家が株式投資を行うにあたって目標とすることは，

・いかに高い収益を得るか

・いかに確実に収益をあげるか（損をする可能性を低くするか）

の2点である．高い収益が期待される銘柄を単独で持つのは，期待収益は大きいが損をする可能性（危険度）も高い．株式銘柄の中にはある銘柄の株価が下がると別の銘柄の株価が上がるといった傾向を持つ組合わせが存在する．このような銘柄に資金を分散投資することによって，（収益は多少犠牲になるが）単独投資の時よりも危険度を低下させること（リスクヘッジ）が可能になる．またこの投資比率は，収益を重視するか，確実性を重視するかによっても違ってくる．

然るべき水準の収益を期待した上で，危険度が最小になるような銘柄の組合わせと投資比率を求める問題は“効率的ポートフォリオ構成問題”と呼ばれ，大規模2次計画問題として定式化される．H. Markowitzの創唱したこの問題に対しては，種々の解法や計算の手間を省くための近似モデルが提案されている［1］．

2．研究目的

以下では比較的資金量の少ない個人投資家の株式投資を想定して，分散投資する株式銘柄の最大数をm（5程度）に制限した場合を考える．この場合，収益と確実性の重視の割合を一つ定めたとしても，例えば，東証上場の1000以上の銘柄から5銘柄の組合わせを全て列挙して，最適な銘柄集合と構成比率を求めるには膨大な時間がかかる．また投資家は，収益と確実性の比重をいろいろに変えた場合の挙動にも興味があるが，これを全てのm銘柄について求めても利用しにくい．

本研究では収益が大きく，リスクヘッジ効果が大きい銘柄を近似的にm個選び，収益と確実性の比重を変えた場合の効率的ポートフォリオの変化を求める手順を提案し，それをもとに収益と危険度の推移の軌跡（効率的フロンティア）を描く．さらにこの方法で選んだm銘柄の効率的フロンティアととランダムに選んだm銘柄に投資した場合の効率的フロンティアを比較する．

3．基本モデル

各株式証券のある期の収益率を

収益率＝（期末の株価－期首の株価）／期首の株価

で定義し，過去の収益率の平均をその銘柄の期待収益率とする．また，危険率は収益率のばらつきの大きさと定義し，各銘柄の過去の収益率の分散を危険率とみなす．

過去N期のデータを用い，対象銘柄数をn，第i証券の期待収益率をμ_i，第i証券と第j証券の共分散をσ_{ij}とする．第i証券に$x_i(\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0)$の割合で投資する合成銘柄（分散投資計画）の期待収益率$E(x)$と危険率$V(x)$は，次のようになる．

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \quad \left(\sigma_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N}(r_{ip}-\mu_i)(r_{jp}-\mu_j),\ r_{ip}\text{は第}i\text{証券の第}p\text{期の収益率}\right)$$

4．多証券に分散投資した場合の効率的ポートフォリオ

4．1　定式化

通常，効率的なポートフォリオとは，投資家の望む収益率E_0以上の期待収益率を持ち，危険率を最小にする銘柄の組合わせと投資比率を意味する．E_0を与えたときの効率的ポートフォリオは次の数理計画問題（I）の最適解で与えられる［2］．

$$
\text{(I)}\quad
\begin{cases}
\min & V(x) \\
sub.to & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \geq E_0 \\
 & x_i \geq 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)
\end{cases}
$$

このままでは，ある期待収益率E_0に対する効率的なポートフォリオしか求められないので，期待収益率を変化させたときの効率的なポートフォリオを全て求められるように，Markowitzによるパラメトリックな2次計画問題（II）に変換する．

$$
\text{(II)}\quad
\begin{cases}
\min & V(x) - \alpha E(x) \\
sub.to & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
 & x_i \geq 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)
\end{cases}
$$

（II）は期待収益率を高く，危険率を小さくという2つの目的に1と$\alpha(0 \leq \alpha < \infty)$の重みを付け，1目的の最小化問題に統合したもので，$\alpha = 0$とすれば危険率最小のポートフォリオが求まり，$\alpha \to \infty$とすれば期待収益率最大のポートフォリオが求まる．任意のE_0に対する効率的なポートフォリオは，あるα（E_0に応じて決まる）に対する（II）の最適解で与えられる．

4．2　問題（II）の解法

問題（II）のLagrange関数

$$
L(x,\lambda) = V(x) - \alpha E(x) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right) \qquad \text{（ただし，}\lambda\text{はLagrange乗数）}
$$

にKuhn-Tuckerの定理を適用すると，（II）の最適解$\tilde{x}$は以下のように特徴づけられる．

（a）　停留／境界条件　$$\frac{\partial V(\tilde{x})}{\partial x_i} + \lambda - \alpha\mu_i \geq 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

（b）　相補スラック条件　$$\tilde{x}_i\left\{\frac{\partial V(\tilde{x})}{\partial x_i} + \lambda - \alpha\mu_i\right\} = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

n個の変数$x_1, x_2, \cdots, x_n$の中で正の値をとるものを内部変数，値が0であるものを外部変数と呼ぶ．あるαに対して，$x_1, x_2, \cdots, x_k$が内部変数であるとすると，（b）より，$\dfrac{\partial V(\tilde{x})}{\partial x_i} = 2\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_j$に注意して，

$$
2\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_j + \lambda - \alpha\mu_i = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,k)
$$

が成立しなくてはならない．これに$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$の条件を加えた次の（c）が解くべき方程式となる．

$$
(\mathrm{c})\begin{cases}
x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 1 \\
2\sigma_{11}x_1 + 2\sigma_{12}x_2 + \cdots + 2\sigma_{1k}x_k + \lambda = \alpha\mu_1 \\
2\sigma_{21}x_1 + 2\sigma_{22}x_2 + \cdots + 2\sigma_{2k}x_k + \lambda = \alpha\mu_2 \\
\cdots\cdots\cdots \\
2\sigma_{k1}x_1 + 2\sigma_{k2}x_2 + \cdots + 2\sigma_{kk}x_k + \lambda = \alpha\mu_k
\end{cases}
$$

4．3．アルゴリズム

パラメータαを∞から0へ変化させつつ，内部変数$x_1, x_2, \cdots, x_k$とλを未知数，αを記号パラメータとして連立方程式（c）を，内部変数の集合を更新しながら掃き出し法で解いていく．

INVAR：内部変数の添字の集合

λ_j：外部変数x_jの相補変数（$\lambda_j = 2\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}x_i + \lambda - \alpha\mu_j$，$x_j$に対する（a）式の左辺）

step0：$k \leftarrow 0$．期待収益率最大の銘柄を$i^{(0)}$とすると$INVAR \leftarrow \{i^{(0)}\}$．$\alpha^{(0)} = \infty$においては$i^{(0)}$以外は外部変数になる．

step1：変数λと内部変数を未知数とし，αを定数パラメータとして連立方程式（c）を解く．またその結果を外部変数の相補変数に代入する．

step2：αを$\alpha^{(k)}$から減少させ，最初に$x_i \geq 0$（$i \in INVAR$），$\lambda_j \geq 0$（$j \notin INVAR$）の条件を満たさなくなるαの値をα^*，対応する変数x_i，もしくはλ_jの添字をp^*とする．$\alpha^* \leq 0$であれば現在の*INVAR*が最小分散点を与えるので$\alpha = 0$として$x_i\,(i \in INVAR), E, V$を計算して終了する．$0 < \alpha^* < \alpha^{(k)}$であれば$k \leftarrow k+1$，$\alpha^{(k)} \leftarrow \alpha^*$とし，$p^* \in INVAR$ならば$INVAR \leftarrow INVAR - \{p^*\}$とし，$p^* \notin INVAR$ならば$INVAR \leftarrow INVAR + \{p^*\}$とする．
step1に戻る．

5．実験

5．1　実験で使用するデータ

日経平均株価に採用されている225銘柄からＮＴＴを除いた224銘柄を考慮対象とする．これらの銘柄の株価を1982年1月から1986年12月まで月ごとに60期分調べ，これから求めた収益率の平均と分散を各銘柄の期待収益率および危険率とする．この期間を選んだ理由は，入力データおよび計算手続きが正しいかどうかを確認できる部分的データがあるためと，この期間中に株価が極端に大きく変動することが少ないためである．以下では$m = 5$として実験を行った．

5．2　実験

224銘柄から５銘柄の組合わせを全て取り上げ，それぞれの効率的フロンティアを求め，さらにそれらから全体としての効率的フロンティアを求めるのは膨大な時間がかかるので，以下の方法で近似的に銘柄の絞り込みを行う．

1）銘柄対をリスクヘッジ効果の大きい（共分散の小さい）方から順に（本実験では100銘柄対まで），双方の収益率が一定基準（２%）以上のものを選び出す．実際には銀行などの預金で確実に得られる収益よりも多くの収益を得られる見込みがなければ，株式投資の意味がない．また，期待収益率2.5%に固定した問題（Ｉ）を解いて求めたポートフォリオは25銘柄で構成されることが報告されている［１］．そこで本実験では次の23銘柄を選びだした．

間組，青木建，日清粉，クラレ，三東圧，日産化，洋曹達，信越化，日合成，旭電化，大日薬，小野田，東海力，日本電工，三井金，住友鉱，井関農，富士通，日光学，住友銀，三井信，三菱信，京成

2）上で選んだ23銘柄を対象に問題（II）の非負制約を除いた（空売りを許した）緩和問題をαの

値を変化させながら解き，投資比率の高い順に上位５銘柄の組合わせを選び出す．αの値を変化させることにより収益率と危険率の比重が変わり，異なる銘柄の組合わせが選ばれる．

$\frac{\alpha}{1+\alpha}(=\beta)$を0.001刻みで計算したときの，比率の上位５銘柄の組合わせとその組合わせのとるβの範囲は次の通りである．

① $0.000 \le \beta \le 0.063$　間組，三東圧，信越化，小野田，三菱信

② $0.063 < \beta \le 0.195$　三東圧，信越化，小野田，東海カ，三菱信

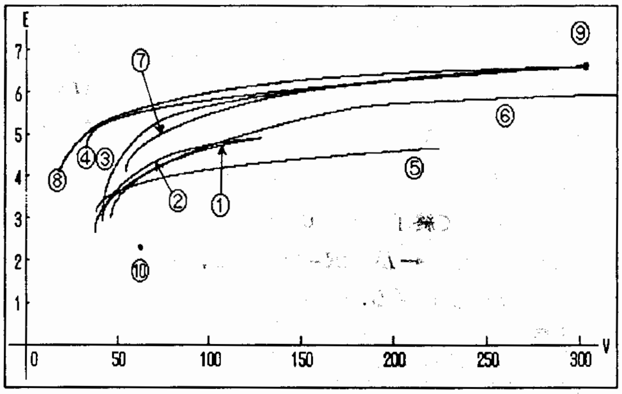
③ $0.195 < \beta \le 0.317$　三東圧，信越化，東海カ，三井金，三菱信

④ $0.317 < \beta \le 1.000$　信越化，日合成，東海カ，三井金，三菱信

3）２）で選び出された４通りの５銘柄と，23銘柄からランダムに選び出された５銘柄についてそれぞれ効率的ポートフォリオを描き，この方法の有効性を比較する．

6．結果と考察

図の①～④は２）の５銘柄に，また⑤～⑦はランダムに選んだ５銘柄に，⑧は１）の23銘柄　に分散投資した場合の効率的フロンティアであり，⑨は収益率最大銘柄，⑩は危険率最小銘柄にそれぞれ単独投資した場合の期待収益率と危険率を図示したものである．その結果，①～⑦のすべての分散投資において危険率最小銘柄よりも危険率が低くかつ収益率が高い投資が期待でき，リスクヘッジの効果が示された．また①～⑦のうち，２）の方法で選んだ５銘柄の組合わせの中で収益率を重視した組合わせ（④）が最も効率的なポートフォリオを構成し，この実験で用いた近似的なアプローチが有効であることがわかった．



図．効率的フロンティア

7．おわりに

本研究では，比較的資金の少ない個人投資家の株式投資を想定し，より効率的なポートフォリオを構成する銘柄を求める近似的アプローチの提案をし，収益とリスクの重視の割合をパラメトリックに変化させた場合の効率的ポートフォリオを求めた．

この方法には以下のような利点がみられた．

（１）近似的に解くため，計算量が減少できる．

（２）パラメトリックに収益とリスクの重視の割合を変えてポートフォリオを求めることで，投資家に有用な情報を与えることができる．

また，問題点としては１）の方法で収益率の高いものの中から選んできたために，期待収益率は高いが危険率も比較的高くなってしまったことが挙げられる．その改善策としては，１）の方法に自己分散も考慮に入れることが考えられる．

〈参考文献〉

［１］今野　浩：「数理決定法入門」，朝倉書店，１９９２．

［２］津野義道：「ポートフォリオ選択論入門」，共立出版，１９９１．