ポートフォリオ選択問題～効率的ポートフォリオの求め方とその評価～

荒井 利浩　田中 靖啓（沼田 一道助教授，池辺 淑子助手）

1．はじめに

手持ち資金の目減りを防ぎ、積極的に利得を追求する資金運用方法の一つに株式投資がある。投資家は、いかにリスクを低くし、いかに高い収益を得るかということを考え、株式投資を行う。株式銘柄の中には相反する値動きをする組み合わせが存在し、このような株式銘柄に分散投資することで、単独投資よりもリスクを低下させることが可能となる。投資銘柄の組み合わせとその投資比率をポートフォリオという。Markowitzは、与えられた期待収益率を確保した上で、危険度（リスク）が最小になるポートフォリオを効率的ポートフォリオと規定した。このモデルはMarkowitzのE－Vモデルと呼ばれている。また、効率的ポートフォリオに相当する点の全体を効率的フロンティアという。

本研究では、MarkowitzのE－Vモデルに基づき効率的ポートフォリオを実際のデータを用いて計算し、求められたポートフォリオが実際どの程度の収益率及び危険度があるかを調べ、E－Vモデルが投資家の指針として役立つかどうかを検討する。

2．E－Vモデル

各株式証券のある期の収益率を

$$\text{ある期の収益率} = \frac{\text{期末の株価}-\text{期首の株価}}{\text{期首の株価}} \qquad (\mathrm{I})$$

で定義し、過去の収益率の平均をその銘柄の期待収益率とする。危険度（リスク）は収益率のばらつきの大きさと定義し、各銘柄の過去の収益率の分散を危険度とみなす。

投資銘柄数を n として、過去N期のデータを用いたときの第 i 銘柄の期待収益率を μ_i、第 i 銘柄と第 j 銘柄の共分散を σ_{ij}、第 i 銘柄への投資比率を x_i とする。

ただし、$x_i \geqq 0 \ (i=1,2,\cdots,n)$、$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$。

このようなポートフォリオの期待収益率E(x)と危険度V(x)は次のようになる。

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$

$$\left[\ \sigma_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(r_{it}-\mu_i)(r_{jt}-\mu_j) \quad \text{ただし、} r_{it} \text{は第} i \text{銘柄の第} t \text{期の収益率}\ \right] \qquad (\mathrm{III})$$

3．定式化

効率的なポートフォリオとは、投資家の望む収益率 E_0 以上の期待収益率を持つものの中で危険度を最小にする銘柄の組み合わせと投資比率のことである。E_0 が与えられたときの効率的ポートフォリオは次の数理計画問題（Ⅰ）の最適解で与えられる[1]。

$$(\mathrm{I})\begin{cases} \min & V(x) \\ \text{sub. to} & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \geqq E_0 \\ & x_i \geqq 0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

このままでは、ある期待収益率 E_0 に対する効率的なポートフォリオしか求められないので、期待収益率を変化させたときの効率的なポートフォリオがすべて求められるように、パラメトリックな２次計画問題（Ⅱ）に変換する。

$$
(\mathrm{II})\begin{cases}\min & V(x)-\alpha E(x)\\ \text{sub.to} & \sum_{i=1}^{n} x_i=1\\ & x_i\geqq 0\quad (i=1,2,\cdots,n)\end{cases}
$$

(Ⅱ)は期待収益率を高く、危険度を小さくという２つの目的に１とα（$0\leqq\alpha<\infty$）の重みをつけ、一目的の最小化問題に統合したものと考えることもでき、$\alpha=0$とすれば危険度最小のポートフォリオが求まり、$\alpha\to\infty$とすれば期待収益率最大のポートフォリオが求まる。

任意のE_0について、E_0に対する効率的なポートフォリオは、あるα（E_0に応じて決まる）に対する問題（Ⅱ）の最適解で与えられる。

４．効率的ポートフォリオの求め方

４．１　問題（Ⅱ）の最適解

問題（Ⅱ）のLagrange関数

$$
L(x,\lambda)=V(x)-\alpha E(x)+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i-1\right)\quad（ただし、\lambda はLagrange乗数）
$$

にKuhn-Tuckerの定理を適用すると、その最適解xは以下のように特徴づけられる。

（１）停留／境界条件

$$
\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}+\lambda-\alpha\mu_i\geqq 0\quad (i=1,2,\cdots,n)
$$

（２）相補スラック条件

$$
x_i\left\{\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}+\lambda-\alpha\mu_i\right\}=0\quad (i=1,2,\cdots,n)
$$

n個の変数$x_1,x_2,\cdots,x_n$の中で正の値をとるものを内部変数、値が０であるものを外部変数と呼ぶ。あるαに対して、$x_1,x_2,\cdots,x_k$が内部変数であると仮定すると、（２）より、

$$
2\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_j+\lambda-\alpha\mu_i=0\qquad (i=1,2,\cdots,k)
$$

となり、これに$\sum_{i=1}^{n}x_i=1$の条件を加えた次の（Ⅲ）を解く。

$$
(\mathrm{III})\begin{cases}
x_1+x_2+\cdots+x_k=1\\
2\sigma_{11}x_1+2\sigma_{12}x_2+\cdots+2\sigma_{1k}x_k+\lambda=\alpha\mu_1\\
2\sigma_{21}x_1+2\sigma_{22}x_2+\cdots+2\sigma_{2k}x_k+\lambda=\alpha\mu_2\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
2\sigma_{k1}x_1+2\sigma_{k2}x_2+\cdots+2\sigma_{kk}x_k+\lambda=\alpha\mu_k
\end{cases}
$$

この連立方程式の解が最適解の候補となる。

４．２　アルゴリズム

４．２．１　パラメトリックな相補掃き出し法

パラメータαを∞から０へ変化させつつ、内部変数$x_1,x_2,\cdots,x_k$とλを未知数、αをパラメータとして連立方程式（Ⅲ）を、内部変数の集合を更新しながら掃き出し法で解いていく。

U　：内部変数の集合

λ_j：外部変数x_jの相補変数（$\lambda_j=2\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}x_i+\lambda-\alpha\mu_j$，$x_j$に対する不等式制約（１）式の左辺）

step0：期待収益率最大の銘柄をh，$\alpha^{old}=\infty$とする。

$U\leftarrow\{x_h\}$，x_h以外は外部変数になる。

step1：連立方程式（Ⅲ）を解きλと内部変数の値を求める。また、その結果を不等式制約（１）の左辺に代入し得られる値をλ_jとする。

step2：αをα^{old}から減少させ、最初に$x_i \geqq 0$ （$x_i \in U$），$\lambda_j \geqq 0$ （$\lambda_j \notin U$）の条件を満たさなくなるαの値をα^*，対応するx_i，もしくはλ_jをx_p，もしくはλ_pとする。
$\alpha^* \leqq 0$であれば現在のＵが最小分散を与えるので$\alpha = 0$としてx_i，Ｅ，Ｖを計算して終了する。$0 < \alpha^* < \alpha^{old}$であれば、$\alpha^{old} \leftarrow \alpha^*$とし、$x_p \in U$ならば$U \leftarrow U - \{x_p\}$，$x_p \notin U$ならば$U \leftarrow U + \{x_p\}$としてstep1に戻る。

4.2.1のアルゴリズムでは$n \geqq 50$で退化等が起こってしまい 、更にプログラムに工夫を凝らさないと計算ができないことが判明した[3]。そこでｎの値が大きくなっても解くことができる4.2.2のアルゴリズムを用いることにした。

4．2．2　等分散原則に基づく新しい方法　[2]

αを固定し、内部変数$x_1, x_2, \cdots, x_k$とλを未知数として連立方程式（Ⅲ）を、内部変数の集合を更新しながら掃き出し法で解いていく。

step０：$2\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_j - \alpha\mu_i$の最小のものを探す。このときの$x_j$を$x_s$とし、$U \leftarrow \{x_s\}$，
$x_j^{old} = x_s = 1$とする。$\lambda^{old} = \sigma_{ss} - \alpha\mu_s$

step１：x_m（$x_m \notin U$）について$2\sum_{j=1}^{n}\sigma_{mj}x_j - \alpha\mu_m \geqq -\lambda$であれば、現在のＵが最適となるので終了する。$2\sum_{j=1}^{n}\sigma_{mj}x_j - \alpha\mu_m < -\lambda$であれば、$2\sum_{j=1}^{n}\sigma_{mj}x_j - \alpha\mu_m$が最小となる$x_m$を$x_h$とし、$U \leftarrow U + \{x_h\}$とする。

step２：連立方程式（Ⅲ）を内部変数とλについて解き、それらをx，λとする。

step３：解xの中に負のx_j（$x_j \in U$）があれば、$\dfrac{x_j^{old}}{x_j^{old} - x_j}$の値が最小になる$x_j$を$x_p$とし、
$U \leftarrow U - \{x_p\}$としてstep２に戻る。
解xの中に負のx_j（$x_j \in U$）がなければ、$x^{old} \leftarrow x$，$\lambda^{old} \leftarrow \lambda$としてstep１に戻る。

５．実験

５．１　使用データ

日経平均株価に採用されている225銘柄からＮＴＴを除いた224銘柄の1987年1月から1991年12月までの株価（60期）を使用し、これから30期ごとに収益率の平均と分散を求め、それらを各銘柄の期待収益率及び危険度とする。

５．２　実験内容

実際のデータによって求められたポートフォリオがどの程度有効であるかを収益率とその変動により、以下の（ａ）～（ｃ）について比較する．なお、評価期間Ｔは３０期間とする。
Ｔ期における投資案（$31 \leqq T \leqq 60$）

（ａ）Ｔ－１期，Ｔ－２期，・・・，Ｔ－３０期から求めた期待収益率が最大の銘柄への単独投資（単独投資①）。

（ｂ）Ｔ－１期，Ｔ－２期，・・・，Ｔ－３０期から求めた期待収益率が２％以上でかつ分散が最小の銘柄への単独投資（単独投資②）。

（ｃ）Ｔ－１期，Ｔ－２期，・・・，Ｔ－３０期から求めたσ_{ij}，μ_iについて$\alpha = 0$，５，１０，５０，１００，５００とした問題（Ⅱ）を解いて得た効率的ポートフォリオによる分散投資。

6．結果と考察

図1は、（a）～（c）の期待収益率（E）の変動を示したものであり、図2は、（a）～（c）の危険度（V）の変動を示したものである。また、表1は図1と図2で示したEとVの平均を計算したものである。

その結果、図1からはαを固定させて考えると期が変化するに従ってEは全体的に下がっていることがわかり、図2からは$\alpha=0$，5，10のとき、Vは他のときと比べてかなり安定していることがわかる。また、当然のこととして、図1からは分散投資において、αが大きくなるにつれてEが大きくなり、単独投資①に近づいていくと言え、図2からは同じく分散投資において、αが大きくなるにつれてVが大きくなり、単独投資①のときが一番大きいと言える。さらに、単独投資②について表1のEとVの平均から他の投資方法と比べてみると、$\alpha=10$，50のときの方がEが高くVが低いことから、単独投資②よりも優れていると言える。

図3は、例として第31期の効率的フロンティアを示したものである。この効率的フロンティアは、比較的低いVのところで急激に立ち上がっており、Eを少し犠牲にするだけで、充分Vの小さいポートフォリオが得られることがわかる。

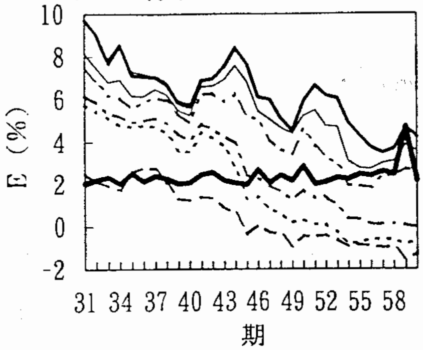

図1　期待収益率（E）の変動

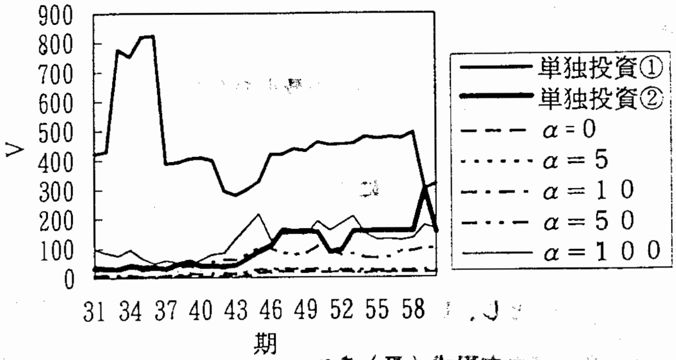

図2　危険度（V）の変動

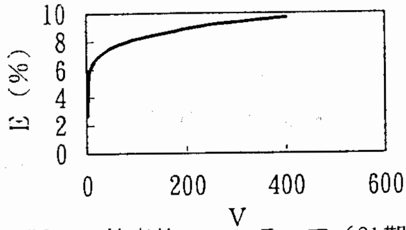

図3　効率的フロンティア（31期）

表1　EとVの平均

	Eの平均	Vの平均
単独投資①	6.3023	458.7198
単独投資②	2.3639	98.5406
$\alpha=0$	0.4635	10.4702
$\alpha=5$	2.0514	13.6432
$\alpha=10$	2.8233	19.1724
$\alpha=50$	4.5630	65.2247
$\alpha=100$	5.3900	122.6206

7．総括

本研究では、パラメータを固定させることにより効率的なポートフォリオを求めるアルゴリズムを用い、それに基づき実際のデータで効率的ポートフォリオを計算し、期を変化させたときの期待収益率及び危険度を求め、その評価を行った。

この方法では、利点として多銘柄でも容易に計算でき、期待収益率や危険度のそれぞれの変動を長期間にわたってみることができる。問題点としては、ある期待収益率を設定したときのポートフォリオを求めるのには、パラメータを何度も変化させなければならないので、今後この点を克服しなくてはならないと考える。今回は、ほとんどの銘柄の株価が下がっている時のデータを用いてポートフォリオの構成とその評価を行ったが、このような時期においては、分散投資の効果が充分に確認された。また、株価の動向によっては分散投資の必要性にも影響が生じると思われる。

＜参考文献＞

[1] 津野義道：「ポートフォリオ選択論入門」 共立出版(1991).
[2] Numata,K.：Quadratic Programming with a Single Generalized Upper Bound,研究資料(1995).
[3] 辻博康，吉田昌弘：「小数銘柄への株式分散投資」 東京理科大学卒業論文(1994年度).