リンクに容量制約のある交通量配分問題

遠藤 徹 (沼田一道助教授, 池辺淑子助手)

1 はじめに

交通量によって各道路の通過所要時間 (費用) が変化する道路網上で, 移動要求 (起終点の組 : ODペア、移動要求量 : OD量) が与えられたとき, 道路網上に実現する交通流を求める問題を交通量配分問題という. 配分の原則として道路網全体の利用者の総費用最小化を目的とする「全体最適化原則」と, 各利用者が道路の混雑状況を知った上で各自の最短時間経路を選択する「利用者最適化原則」の２つがある. 利用者最適化原則では利用者が各自の最短時間経路を選択するので, 現実の交通流に近い流れを表していると考えられる.

本研究では利用者最適化原則の下で, より現実に近いモデルとして各道路に容量制約のあるネットワークを Davidson によって提案された所要時間関数を用いてモデル化した交通量配分問題の解法として, 既存のＩＡ法 [2] を用いた場合と Daganzo[1] による解法を用いた場合を数値実験により比較・検討する.

2 問題の定式化

道路網の交差点をノード (N : $1,2,...,n$), その交差点に出入する道路をリンク (L) とする. ＯＤ量はＯＤペアごとに与えられるとし, 始点 rから終点 s へ向かうＯＤ量を $D(r,s)$ で表す ($r,s=1,2,...,n \quad r\neq s$). $D(r,s)$ による交通流がリンク (i,j) を通過する流量を x_{ij}^{rs}, 終点を s とするＯＤ量による交通流がリンク (i,j) を通過する流量を x_{ij}^{s}とする. ここで, $x_{ij}^{s}=\sum_{r} x_{ij}^{rs}$である. リンク (i,j) を通過する総交通量を x_{ij}とすると, x_{ij}は、$x_{ij}=\sum_{s} x_{ij}^{s}$で与えられる. ノード jにおいて, jから s へ向かうＯＤ量 $D(j,s)$ と jに入ってくる s へ向かう総流量$\sum_{i} x_{ij}^{s}$の和は, j から出て s へ向かう総流量$\sum_{k} x_{jk}^{s}$に等しい (流量保存). 道路の通過所用時間を費用と考え, リンク (i,j) の費用関数を $C_{ij}(x_{ij})$ とする. 以上を用いて、利用者最適化の交通量配分問題は次のように定式化される.

$$
\text{(UOP1)}\left\{\begin{array}{lll}
\min & f(x)=\displaystyle\sum_{ij}\int_{0}^{x_{ij}} C_{ij}(\xi)d\xi & \\
\text{sub.to} & D(j,s)+\displaystyle\sum_{i} x_{ij}^{s}=\sum_{k} x_{jk}^{s} & j\neq s\ ,j=1,2,...,n \\
& x_{ij}^{s}\geq 0\ ;\ \forall ij,s &
\end{array}\right.
$$

道路網 (N,L) 上に実現する交通流は (UOP1) の最適解で与えられる.

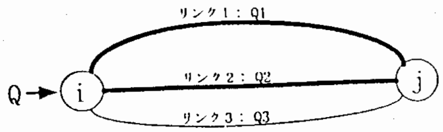
3 等時間原則

利用者最適化原則のもとでの交通流は次のような性質を持つ.

利用者最適化原則 :任意のＯＤペアを考えたときに, その間を結ぶ経路の中で利用されている経路の所要時間は、互いに等しく, 利用されていない経路の所要時間より大きくない

この原則は「利用者は交通量が少ないうちは最短時間路を選択するが，交通量の増加にともない所要時間が増加すると他に等時間で行ける経路が発生し，等時間で行ける限りその経路も利用し続けるため，等時間となる経路が多数発生する」ことを示している．

数理計画問題 (UOP1) の最適解が，利用者最適化原則の下での交通流を与えることは，次のようにして理解することができる．すなわち図１において交通量 Q をノード i からノード j へ流す場合，リンク１，２の所要時間が等しくなるように Q を配分することは図２の斜線部の面積の和 ((UOP1) の目的関数) を最小化することと等価である．



Q ： i から j へ向かう交通量

Qn ： Qのうちリンク n への配分量

C(Qn) ： Qn 流れたときのリンク n の通過所要時間

$Q = Q1 + Q2 + Q3,\ Q3 = 0$

$C(Q1) = C(Q2) < C(Q3)$

図１ ：ネットワークの例

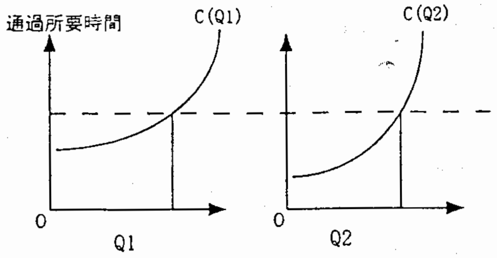


図２ ：等時間原則に基づく配分状態

等時間原則は，(UOP1) の最適性の条件 (Kuhn-Tucker 条件) に他ならない．

一般に，交通流を求める計算においては，全ＯＤペアを一度に考えるのではなく，あるＯＤペアに注目 (その他のＯＤペアの流れは固定) して流れを求め，注目するＯＤペアを遷移させながら全リンク上の流量が収束するまで繰り返すことで実行可能な流れが得られる．以下本研究では，解法の記述は１ＯＤペアに着目して進める．

4　IA 法 (Incremental Assignment method)

経路の流量を変数とし等時間原則を利用した近似解法として IA 法がある．IA 法は大きく分けて phase1，phase2 の２つの部分からなる．

<phase1> 今考えているＯＤ間の移動要求量を Q とする．

ネットワーク上の流量が存在しない状態から始め，その時点の最短路に $Q／N$(Nは適当な正整数) ずつ配分し，影響を受けるリンクの費用を更新する．全 OD 量を流し切れば終了し，初期実行可能解が得られる．

<phase2> εを予め与えられた小さな正数とする．

step1 各経路の流量を一斉に $(1-\varepsilon)$ 倍し，その時点での最短路探索を行う．

step2 この最短路にεQ を流し，影響を受けるリンクの費用を更新する．OD ペアについて得られている経路のコストが一定許容範囲内で等しくなれば終了，そうでなければ step1,step2 を繰り返す．

5　リンクに対する容量制約

各リンクに対する容量制約は，費用関数 $C_{ij}(x_{ij})$ に "$x_{ij} \to u_{ij}$ のとき $C_{ij}(x_{ij}) \to \infty$" となるような性質を持たせることで実現する．Davidson はこのような関数として，次の形のものを提案している．

$$C_{ij}(x) = C_{ij}(0.0)\frac{u_{ij} - (1 - J_{ij})x_{ij}}{u_{ij} - x_{ij}} \; ; \quad 0 \le x_{ij} < u_{ij} \; , \; 0 < J_{ij} \le 1$$

しかしこの費用関数に対してＩＡ法を適用した場合，あるリンクにおける流量が上限に近づくと振動が大きくなり収束しにくくなることがあり、実用的ではない．そこで，Daganzo[1] によって提案された次の近似解法を適用する．

「Daganzo の方法」

step0 問題 (UOP1) の実行可能解 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ を求める (本研究ではＩＡ法の phase1 を用いる).　$k = 0$.

step1 目的関数 $f(x)$ を $\boldsymbol{x}^{(k)}$ のまわりで Taylor 展開し，一次近似する．

$$\begin{aligned} f(x) &\doteq \sum_{ij}\int_0^{x_{ij}^{(k)}} C_{ij}(\xi)d\xi + \sum_{ij} C_{ij}(x_{ij}^{(k)})(x_{ij} - x_{ij}^{(k)}) \\ &= \sum_{ij} C_{ij}(x_{ij}^{(k)})x_{ij} + const. \end{aligned}$$

この近似式を用いて問題 (UOP1) を以下の問題 (UOP2) として扱う．

$$(\mathbf{UOP2})\begin{cases} \min & f(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\sum_{ij} C_{ij}(x_{ij}^{(k)})x_{ij} = \sum_{ij} C_{ij}(0.0)\frac{u_{ij} - (1 - J_{ij})x_{ij}^{(k)}}{u_{ij} - x_{ij}^{(k)}}x_{ij} \\ \text{sub.to} & D(j,s) + \displaystyle\sum_i x_{ij}^s = \sum_k x_{jk}^s \qquad j \ne s \\ & x_{ij}^s \ge 0 \; ; \; \forall ij, s \end{cases}$$

問題 (UOP2) の最適解を $\boldsymbol{y}^{(k)}$ とする．問題 (UOP2) は線形計画問題であり，最適解 $\boldsymbol{y}^{(k)}$ は各ノードから s へ向かう最短路に各ノードで発生する流量を全て流すことに対応する．

step2 $\boldsymbol{x} = (1 - \alpha)\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha \boldsymbol{y}^{(k)}$ の形で $f(\boldsymbol{x})$ が最小となるような，$\alpha = \alpha^*$ を探索する．ただし，$x_{ij} < u_{ij}$ であるため，α にはその上限　$\alpha_{max} = \min_{x_{ij}^{(k)} < y_{ij}^{(k)}} \Big((u_{ij} - x_{ij}^{(k)})/(y_{ij}^{(k)} - x_{ij}^{(k)})\Big)$ が存在する．$[0, \alpha_{max}]$ 区間を黄金分割探索することにより α^* を求める．

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \arg \min_{0<\alpha<\alpha_{max}} f(\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha(\boldsymbol{y}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k)})) \\ &= \arg \min_{0<\alpha<\alpha_{max}} \sum_{ij} C_{ij}(0.0)\Big((1-J_{ij})(x_{ij}^{(k)} + \alpha(y_{ij}^{(k)} - x_{ij}^{(k)})) - u_{ij}J_{ij}\ln(u_{ij} - (x_{ij}^{(k)} + \alpha(y_{ij}^{(k)} - x_{ij}^{(k)})))\Big) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha^*(\boldsymbol{y}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k)})$ として $\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\|$ が一定許容範囲内になれば終了，そうでなければ $k = k + 1$ として step1 へ.

6 数値実験

ＩＡ法と Daganzo の方法について，Davidson の形の費用関数を持つ図３のネットワークにおける交通流をＩＡ法と Daganzo の方法で求め，その収束の様子を比較した（ＯＤ量はノード１からノード４へ２０流す）．図４はＩＡ法，Daganzo の方法による結果であり上が前者，下が後者である．この実験結果では Daganzo の方法が３３回の繰り返しで収束し，ＩＡ法が７６回かかって収束している（ＩＡ法は phase2 の，Daganzo の方法は step1-step2 の繰り返し回数）.

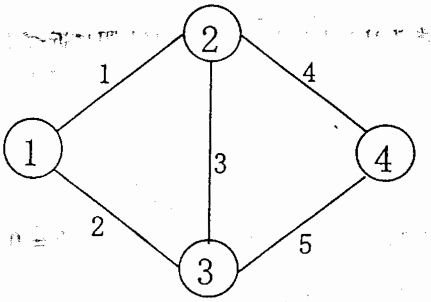


図３ ：例題ネットワーク

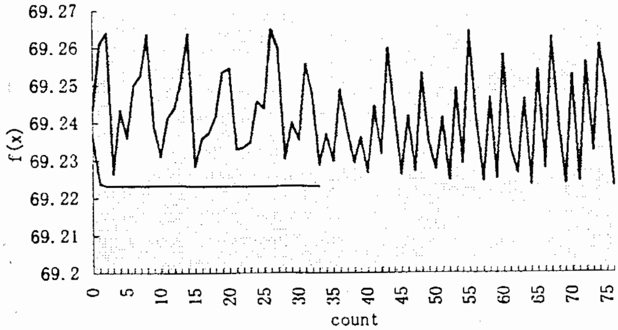


図４ ：$f(x)$ の収束状況

7 結論

本研究では，リンクに容量制約のある交通量配分問題としてＩＡ法と Daganzo の方法の比較を，ごく小規模なネットワークで行った．実験の結果から，Daganzo の方法はＩＡ法よりも収束が速いことが多いという結論が得られた．これはＩＡ法が決まったεで振動させつつ解を求めるのに対して，Daganzo の方法では，αを変えながら一次元探索するので図４からもわかるように目的関数が効率的に収束しているためと思われる．また Daganzo の方法ではＩＡ法では収束しない例題でも収束することが確認された．しかしこれは収束条件の違いによるものとも考えられ，収束した Daganzo の方法による結果においても，使われている経路の所要時間は，必ずしも等時間原則を満たしていない．これは一度使用された経路が，計算の進行に伴い使用されなくなっても，その経路の流量はゼロにならないためである．この点はＩＡ法と Daganzo の方法は共通であるが，Daganzo の方法では枝ごとの流量の変化を収束の指標としているので問題にならない．

本研究では，小規模のネットワークの実験しか行わなかったが，大規模なネットワークにおいても計算時間という点では Daganzo の方法のほうが有効であると思われる．

参考文献

[1] Carlos F.Daganzo. ON THE TRAFFIC ASSIGNMENT PROBLEM WITH FLOW DEPENDENT COSTS-I. *Transpn.Res*,Vol.11,pp433-437(1977).

[2] 伊理正夫 ：数理計画法の立場からみた IA 法，オペレーションズリサーチ,vol22,No.12,pp695-701(1977).

[3] 野々峠裕文 ：道路網における交通量配分問題の解法，東京理科大学経営工学輪講資料,1994.