プライマルデュアル法による研究室配属問題の解法

大槻 政史 （沼田 一道 助教授，池辺 淑子 助手）

1．はじめに

東京理科大学工学部経営工学科では毎年４年生になると，各研究室に所属し，卒業研究に取り組むことになっている．約１０の研究室があり，研究の内容も様々である．学生は自分の希望研究室を第３希望まで希望表に記入し提出し，これをもとに学生の研究室配属を決めるのであるが，学生全員が第１希望に配属されることはほとんど不可能である．学生側の希望はもちろん，教員の希望も若干考慮して両者の満足度ができるだけ高くなるような研究室配属を求めたい．本研究では学生，教員が互いに相手に対する好みの度合いを得点として数値化し，最適な研究室配属を全体の得点（満足度）が最も高くなるような研究室配属と定めて，最適な配属を能率的に求めることを目的とする．そのために，研究室配属問題を最小費用流問題として定式化し，プライマルデュアル法を適用する．また，学生の希望と教員の希望の考慮の割合をいろいろ変化させて配属のシュミレーションを行い，配属結果に対する影響をみる．

このタイプの配属問題は一般に，多数の人員を抱えその配属を考えなくてはならない組織に共通のものであり，本研究で示すアプローチの応用範囲は広い．

2．研究室配属問題

学生ｎ人，研究室がｍ室あるとする．ｎ人の学生には学籍番号ｊ（ｊ＝１，２，…，ｎ），ｍ室の研究室には研究室番号としてｉ（ｉ＝１，２，…，ｍ）がそれぞれ与えられているとする．研究室配属についての条件をあげると以下のようになる［１］．

（１）各学生の志望は最大限尊重し，各学生をなるべく上位の志望研究室に所属させる．
　また，教官の希望にもある程度沿うようにする．

（２）どの学生も必ずいずれか一つの研究室に所属させる．

（３）各教官によって設定された研究室定員の上限 u_i，下限 l_i を可能な限り守る．

上記のような問題を「数理的な手法とコンピュータ」を使って効果的に解く方法を考える．学生ｊを研究室ｉに所属させるか否かを現すｍ×ｎ個の変数 x_{ij} を以下のように表す．

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{学生 j を研究室 i に所属させるとき} \\ 0 & \text{学生 j を研究室 i に所属させないとき} \end{cases}$$

さらに，学生各々が第１研究室から第ｍ研究室まで，点数 ps_{ij}（$-100 \leqq ps_{ij} \leqq 100$）を割り付ける．ある研究室を強く志望する学生はその研究室に100点を付け，絶対に所属したくない学生は-100点を付けることによって学生の意思を点数によって表す．研究室は学生に点数 pl_{ij}（$0 \leqq pl_{ij} \leqq 100$）を付ける．そして，$ps_{ij}$，$pl_{ij}$ に重み w_s，w_l を付けたものを学生ｊと研究室ｉのペアの持つ得点 $p_{ij} = w_s ps_{ij} + w_l pl_{ij}$ とすると研究室配属問題は以下のように定式化できる．

$$(P1)\begin{cases} \text{最大化} & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij} \\ \text{条件} & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1,\cdots,n \\ & l_i \leq \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq u_i, \quad i = 1,\cdots,m \\ & x_{ij} = 0 \text{ または } 1, \quad i = 1,\cdots,m; j = 1,\cdots,n \end{cases}$$

3．ヒッチコック型輸送問題

研究室配属問題はそのままでも解くことができるが，それをヒッチコック型輸送問題にして考えてみる．まず，学生の人数がすべての研究室の定員の総和になるように，ダミー学生$\left(\sum u_i - n\right)$人，ダミー学生の得点を$p_{ij} = 0$とする．さらにダミー学生を加えた学生の総数$n'\left(=\sum u_i\right)$，学生の費用を$c_{ij} = 200 - p_{ij}$とする．研究室の上限下限を考えるためにスラック変数s_iを導入すると，問題$(P1)$は右のように書き換えられる．この形はヒッチコック型輸送問題である．

$$
(P2)\begin{cases}
\text{最小化} & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n'} c_{ij}x_{ij} \\
\text{条件} & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ j = 1,\cdots,n' \\
 & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = l_i + s_i,\ i = 1,\cdots,m \\
 & \sum_{j=n+1}^{n'} x_{ij} = u_i - (l_i + s_i),\ i = 1,\cdots,m \\
 & x_{ij} \ge 0,\ i = 1,\cdots,m;\ j = 1,\cdots,n' \\
 & s_i \ge 0,\ i = 1,\cdots,m
\end{cases}
$$

4．最小費用流問題

一般に，有向グラフG＝（N，B）であるグラフにおいて，各枝(n_α, n_β)に容量$a_{\alpha\beta}$と単位流量あたりの費用$c_{\alpha\beta}$が与えられているときに，1点n_sから他の1点n_tへの流量q（定数）の流れ$(x_{\alpha\beta})$の中で総費用を最小にするものを（n_sからn_tへの流量qの）最小費用流といい，これを求めよという問題を最小費用流問題という．ヒッチッコック型輸送問題$(P2)$をこの問題に帰着させる．学生，研究室のネットワークを有向グラフG＝（N，B）で表す（図1）．グラフにソースの点sとシンクの点tを加えて，各々のノードについて，流量保存を用いて最小費用流問題の定式化を行う．
この最小費用流問題を解くために比較的能率の良いプライマルデュアル法を用いる．

$$
(P3)\begin{cases}
\text{最小化} & \sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=1}^{n'} c_{ij}x_{ij} \\
\text{条件} & \sum_{i=1}^{2m} x_{si} = n' \\
 & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - x_{si} = 0,\quad i = 1,\cdots,m \\
 & \sum_{j=1}^{n'} x_{ij} - x_{si} = 0,\quad i = m+1,\cdots,2m \\
 & x_{jt} - \sum_{i=1}^{2m} x_{ij} = 0,\quad j = 1,\cdots,n \\
 & x_{jt} - \sum_{i=m+1}^{2m} x_{ij} = 0,\quad j = n+1,\cdots,n' \\
 & -\sum_{j=1}^{n'} x_{jt} = -n' \\
 & 0 \le x_{ij} \le 1,\ 0 \le x_{jt} \le 1, \\
 & 0 \le x_{si} \le l_i,\ i = 1,\cdots,m \\
 & 0 \le x_{si} \le u_i - l_i,\ i = m+1,\cdots,2m
\end{cases}
$$

5．プライマルデュアル法

5．1　発想

流れ$(x_{\alpha\beta})$が最小費用流であるための必要十分条件を考える．費用$c_{\alpha\beta}$，容量$a_{\alpha\beta}$が与えられた最小費用流問題の有向グラフG＝（N，B）において，流れ$(x_{\alpha\beta})$に対してつぎの3条件を満たす閉路Lを負の費用の閉路という．

（1）$(\alpha,\beta) \in L^+$である(α,β)に対して$x_{\alpha\beta} < a_{\alpha\beta}$

（2）$(\alpha,\beta) \in L^-$である(α,β)に対して$x_{\alpha\beta} > 0$

（3）$\displaystyle\sum_{(\alpha,\beta)\in L^+} c_{\alpha\beta} - \sum_{(\alpha,\beta)\in L^-} c_{\alpha\beta} < 0$

このとき，次の定理が成り立つ.

定理　流れ$(x_{\alpha\beta})$が最小費用流である⇔それに関する負の費用の費用の閉路が存在しない

このことを考えて，負の費用が作られないように，なにも流れていない状態から出発し，単位流量を最小費用流で流せる路を探してはそこにできるだけ多くのものを流すことを繰り返して，流量qをだんだん大きくしていき，n'になるまで続ける．この解法をプライマルデュアル法（primal-dual method）という［2］.

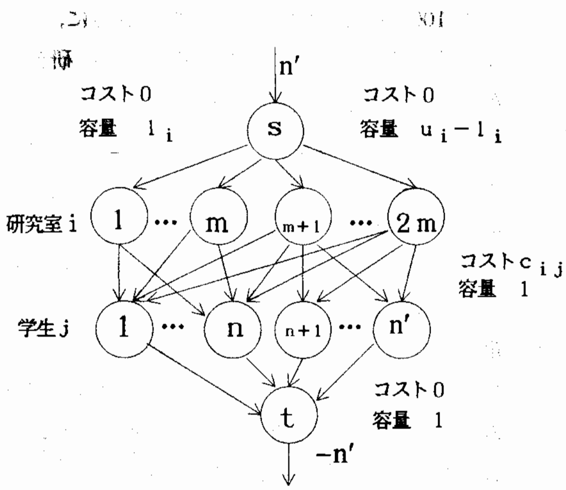

図 1．最小費用流問題のグラフ

$$\left(\begin{array}{l} a_{sj} = l_i \ , \ (j = 1,\cdots,m) \\ a_{sj} = u_i - l_i \ , \ (j = m+1,\cdots,2m) \\ a_{ij} = 1 \ , \ (i = 1,\cdots,2m \,;\, j = 1,\cdots,n') \\ a_{jt} \ , \ (j = 1,\cdots,n') \end{array}\right)$$

5．2　手順

n_sからn_yまでの最短距離v_y（yは全ての頂点）を導入する.

手順0　$x_{\alpha\beta} = 0 \, , q = 0 \, , v_y = 0 \, , l = 1$

手順1（1）n_sからn_tへの流量を1単位増すとき費用最小の路の探索

$$d_{\alpha\beta} = \begin{cases} c_{\alpha\beta} + v_\alpha - v_\beta & (\alpha,\beta) \in B \quad x_{\alpha\beta} = 0 \\ -c_{\alpha\beta} - v_\alpha + v_\beta & (\beta,\alpha) \in B \quad x_{\beta\alpha} = a_{\beta\alpha} \\ 0 & (\alpha,\beta) \in B \quad 0 < x_{\alpha\beta} < a_{\alpha\beta} \\ & (\beta,\alpha) \in B \quad 0 < x_{\beta\alpha} < a_{\beta\alpha} \\ \infty & \text{その他} \end{cases}$$

（2）n_sからn_jへの最短距離Δv_jを求める．$q = n'$ならば終了，そうでなければn_sからn_tへの最短路Rを求める.

（3）$v_y = v_y + \Delta v_y$

手順2　流量の増大と流れの変更

RにそってΔqだけ流す

$$x_{\alpha\beta} = \begin{cases} x_{\alpha\beta} + \Delta q & (\alpha,\beta) \in R^+ \\ x_{\alpha\beta} - \Delta q & (\alpha,\beta) \in R^- \\ x_{\alpha\beta} & \text{その他} \end{cases}$$

$$\Delta q = \min\left\{ \min\left(a_{\alpha\beta} - x_{\alpha\beta}\right), \ \min \ x_{\alpha\beta} \right\}$$

$$q = q + \Delta q$$

手順1に戻る.

終了条件として$q = n'$ならば学生全員が1つの研究室に配属されたことになり終了する．このときの流れ$(x_{\alpha\beta})$が，最小費用流問題の解になる.

6．シミュレーション

学生数n＝100，研究室m＝9，研究室定員15，下限8とした．実際に学生が研究室に付ける得点，

研究室が学生に付ける得点をデータとして集めることは，現実的には不可能であるので，以下のようにランダムに発生させた．学生はすべての研究室に-100～100点を自由に，かつどれか一つの研究室に必ず100点を付けるようにした．さらに，研究室１，２，３，及び４，５は同じ研究分野であると仮定しそれぞれ相関性を持たせるために，研究室１，２，３のうちどれか１つの研究室に100点を付けた学生はそれ以外の研究室にも高得点（100～70点）を付けさせた．研究室４，５も同様に行った．各々の研究室が各学生に付ける得点は，タイプＡ，Ｂと２通り考えた．まずタイプＡとして，成績上位の学生（今回はプログラムの便宜上学籍番号順に成績がよくなっている）を10人ごと10組に分け，1～10番の第１組は100～80点を付け，11～20番の第２組は100～60点，以下同様に100点からその組番×20の幅を持たせランダムに得点を付けさせた．さらにタイプＢとして，学生の成績順で１番100点，２番99点，…，100番１点と，すべての研究室に同じ得点を持たせたものも考えた．このようにして作成したデータを用い，研究室と学生の重みを変化させてやり，そしてタイプＡ，Ｂともに３回ずつ得点のデータを発生させて各々プライマルデュアル法によって最適配属を求めた．出力結果として，得点データ１，データ２の時のタイプＡの実行結果をそれぞれ表１，表２に示す．得点データ３とタイプＢの実行結果及び得点データそのものは省略する．

表１．データ１－Ａ実行結果

	満足度			所属学生数		
学生：研究室	全体	学生	研究室	第１希望	第２希望	第３希望以下
100:0	10000	10000	5053	100	0	0
90:10	9514	9990	5617	99	1	0
80:20	9016	9900	6100	93	5	2
70:30	8748	9760	6537	85	11	4
60:40	8468	9500	7011	75	17	8
50:50	8251	9190	7359	69	17	14

表２．データ２－Ａ実行結果

	満足度			所属学生数		
学生：研究室	全体	学生	研究室	第１希望	第２希望	第３希望以下
100:0	10000	10000	4670	100	0	0
90:10	9469	10000	5067	100	0	0
80:20	9000	9920	5491	94	5	1
70:30	8590	9750	6018	86	11	3
60:40	8271	9380	6704	72	19	9
50:50	8066	9000	7190	60	25	15

７．まとめ

本研究では，実生活の中にある問題，研究室配属問題の一解法を提案し，実行してみた．実際問題としてみると，学生に所属研究室について自分の希望を得点で付けさせ，研究室にも同様に学生に対して得点を付ける．データを入力するのに多少時間がかかるが，入力さえすんでしまえば学生100人くらいならば瞬時に最適な研究室配属を求めることができ，実用的であるといえる．

シミュレーションでは，データの型Ａ，Ｂと重みの割合を様々に変化させて考えたが，実用的なものはどのタイプだろうか．学生の希望をどの程度尊重するかにもよるが，ここでは研究室の希望も若干考慮して考えてみる．タイプＡの学生：研究室＝80:20に注目すると，学生の満足度は100:0と比較してもさほど低くない．９割強の学生が第２希望までに配属されている．この割合ならば，学生の希望を満たし，さらには研究室の満足も得られているといえるのではないだろうか．

シミュレーションにおいて実際に現３年生，研究室両者からデータを取ることができなかったため得点の付け方が実際のものと違ってしまったことを残念に思う．

〈参考文献〉

[1] 伊理正夫，古林隆：「ネットワーク理論」，日科技連出版社，1976.
[2] 今野浩：「数理決定法入門－キャンパスのＯＲ－」，朝倉書店，1992.