多入力多出力事業体の評価法
－ＤＥＡとＭＯＯの比較－

奥　恒彦（沼田　一道助教授、池辺　淑子助手）

１．　はじめに

同様の活動を行う複数の事業体（DMU：Decision Making Unit）を管理，監督する場合，各事業体の活動効率を１つの数値指標によって測定し，現状を把握することがしばしば望まれる．複数の資源を用いて複数の便益を出力する多入力多出力系のDMUに対する，このような相対的な指標を算出する方法（評価手法）として，ＤＥＡ(Data Envelopment Analysis) [３]はよく使われる．

ＤＥＡでは、評価対象であるDMUごとに，（重み付き出力和）／（重み付き入力和）を最大化するよう入出力項目に重み付けを行い，その最大値を数値指標（効率値）とする．これは，実在するDMUの活動の非負結合（あるいは凸結合）も実現可能であると仮定し，当該DMUが活動領域の限界面に迫る度合いを効率値としたものと解釈することができる．しかし，活動領域の連続的結合性に関する仮定が常に妥当であるとは限らないし，“個性を尊重した”相対的な効率値は，項目対ごとの入出力比のような客観的尺度としての明快さに欠ける．

そこで，本研究では連続的結合性の代わりに，項目対ごとの入出力比の並びに関して“非劣”の概念を基礎とする評価手法ＭＯＯ(Multiple Objective Optimization) [１]を取り上げ，ＤＥＡとＭＯＯを比較考察する．[１]ではDMUが効率的か否かの基準しか与えられてないが，本研究では改善目標及びＭＯＯの意味での効率値も提案する．

２．　ＤＥＡの概要

ＤＥＡにおいて分析対象とされる各DMUは，独立した運営の権限を持っていて，同種の入力項目（複数）と同種の出力項目（複数）を持ち，入力値，出力値ともに正値をとる．総数ｎのDMUは，各DMUごとに l 個の入力項目と，k 個の出力項目を持っており，DMU $_j(j=1,2,\cdots,n)$ の入力データを $x_{ij}\,(i=1,2,\cdots,l)$，出力データを $y_{rj}\,(r=1,2,\cdots,k)$ とする．　また，DMU $_j$ の入出力値の並び $(x_{1j}\cdots x_{lj}, y_{1j}\cdots y_{kj})$ をDMU $_j$ の活動と呼ぶ．DMUの活動（$\mathbf{x},\mathbf{y}$）の取り得る値の範囲を活動領域（F）と呼び，一般にパラメータ $\lambda=(\lambda_1,\cdot\cdot\cdot,\lambda_n)$ を用いてつぎのように定義する．

$$\mathrm{F}=\Big\{\,(x_1,x_2,\cdots,x_l,y_1,y_2,\cdots,y_k)\ \Big|\ x_i\ge\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\lambda_j,\ y_r\le\sum_{j=1}^{n}y_{rj}\lambda_j,\ U\ge\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\ge L,$$

$$\lambda_j\ge 0,\ x_i\ge 0,\ y_r\ge 0\ ,\quad (j=1,2,\cdots,n\ ;\ i=1,2,\cdots,l\ ;\ r=1,2,\cdots,k)\Big\}\qquad(1)$$

（１）式のU，Lはλの要素の和の上限値，下限値である．この活動領域において，U=L=1 であるモデルは，BCC (Banker−Charnes−Cooper)モデルと呼ばれている．以後，このBCCモデルを用いてＤＥＡとＭＯＯの比較に使用する．

DMUの非負結合によってつくられる活動領域の限界面は，入力値を維持したまま，これ以上出力値を増加できず，かつ出力値を維持したまま入力値を減少することができない活動であり，これを効率的フロンティアと呼ぶ．このようなDMUをＤ効率的なDMUであると呼ぶ．逆に，限界面にないDMUは，Ｄ効率的なDMUより，入力の余剰や，出力の不足があるので，Ｄ非効率的なDMUと呼ぶ．

評価対象をDMU ｏとし，このDMU ｏについて現状の出力値を固定したまま，活動領域の中で入力を一律最小するモデル（入力最小化モデル）で，DMUの定式化を行うと次のようになる．

［　ＢＣＣモデル・入力最小化　］

第一目的関数　　min　　$Z_1\ =\ \theta$　　（２）

第二目的関数　　max　　$Z_2\ =\ \sum_{j=1}^{n} S_i^{x}+\sum_{j=1}^{n} S_r^{y}$　　（３）

$$\text{s.t.} \qquad \theta x_{io} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \lambda_j + S_i^x \qquad (4)$$

$$y_{ro} = \sum_{j=1}^{n} y_{rj} \lambda_j - S_r^y \qquad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \qquad (6)$$

$$\lambda_j,\ S_i^x,\ S_r^y \geq 0 \qquad (7)$$

$$(j = 1,2,\cdots,n\ ;\ i = 1,2,\cdots,l\ ;\ r = 1,2,\cdots,k)$$

第一目的関数を用いた最適値θはD効率値と呼ばれ，0から1の間の値をとる．$\theta=1$の時，DMU$_o$を相対効率なDMUと呼ぶ．しかし，あるλに対して入力の余剰，あるいは出力の不足が存在する場合，そのようなDMUは，真に効率的とはいえない．この入出力の過不足は，スラック変数S_i^xとS_r^yの和からなる第二目的関数を用いて検出する．第一目的関数を用いた最適目的関数値$\theta=1$で，スラック変数が0であるDMUが前出のD効率的なDMUであり，逆に$\theta<1$であるか，または$\theta=1$であっても，スラック変数が0でないDMUがD非効率的なDMUである．DMU$_o$について，$\theta<1$の場合の解で$\lambda_j>0$となるDMU$_d$をDMU$_o$の参照集合という．

同様な方法で，現在の入力値を固定した上で，出力値を一律最大するモデル（出力最大化モデル）もある．

3．MOO

3．1．MOOの概要

MOOは，非劣解の概念を利用した手法である．DEAは，ある事業体にとって，効率値が最大になるように重み付けをおこなった入出力の比で効率性を判断するが，MOOは，各出力要素の各入力要素に対する比を並べたベクトルで，DMUの活動をそれらの間の半順序関係で効率性を判断する．

測定するDMU$_j$において，k個の出力をl個の入力のそれぞれについて入力1単位あたりに換算したkl個の値を行列$\left[\mathbf{y}_j / \mathbf{x}_j\right]$（$kl$行列）として次のように定義する．

$$\left[\mathbf{y}_j / \mathbf{x}_j\right] = \begin{bmatrix} y_{1j}/x_{1j} & y_{1j}/x_{2j} & \cdots & y_{1j}/x_{lj} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{kj}/x_{1j} & y_{kj}/x_{2j} & \cdots & y_{kj}/x_{lj} \end{bmatrix} \qquad (8)$$

DMU間の，関係$\preceq$を以下のように定義する．

$$\text{DMU}_{j1} \preceq \text{DMU}_{j2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_{rj1}/x_{ij1} \leq y_{rj2}/x_{ij2} \qquad (r = 1,2,\cdots,k\ ;\ i = 1,2,\cdots,l)$$

DMU$_{j1}$ $\preceq$ DMU$_{j2}$ の$\preceq$は，半順序関係であり，DMU$_{j1}$はDMU$_{j2}$に支配されているという．

3．2．効率的DMUの定式化

評価対象をDMU$_o$とし，半順序関係$\preceq$に関して自分を支配しているのは自分自身だけであるか否か，を判定する問題の定式化をすると次のようになる．ただし$\left[y_j / x_j\right]_{pq}$とは，DMU$_j$の行列$\left[y_{pj} / x_{qj}\right]$（$kl$行列）のp，q成分を表す．

$$\max \quad \omega = \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{n} \left[y_j / x_j \right]_{pq} \lambda_j - \left[y_o / x_o \right]_{pq} \right) \qquad (9)$$

$$\text{s. t.} \quad \left[\frac{y_o}{x_o}\right] \le \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{y_j}{x_j}\right] \lambda_j \qquad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \qquad (11)$$

$$\lambda_j \in \{0,1\} \qquad (12)$$

$\omega = 0$の時DMU$_o$は自分以外に自分を支配するDMU$_d$が存在していないDMUであり，そのDMU$_o$を非劣なDMUといい，非劣なDMUを効率的であると判断する．また，$\omega \neq 0$の時は自分以外に自分を支配するDMUが存在しているので，そのDMUを劣なDMUと呼び，劣なDMUを非効率的であると判断する．

3．3． MOOの効率値

MOOの効率値として次の二つを提案する．

第一の効率値θ_uは，非効率なDMU$_o$について，その特性を生かすことを第一に考え，DMU$_o$の（出力／入力）の各項目を一斉にu倍して効率的となった時のuの逆数（1／u）をDMU$_o$の効率値θ_uとする．１入力２出力の例を，図１に示す．

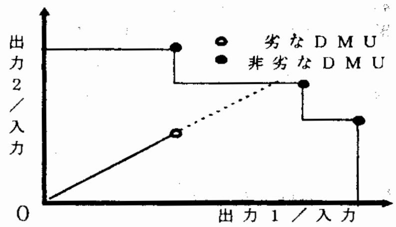

図１　効率値θ_uの図

第二の効率値θ_vの求め方は次のとうりである．効率的DMUの集合D_j=｛DMU$_{j1}$，…，DMU$_{jn}$｝のなかで，非効率なDMU$_o$の活動ベクトル$\left[\frac{\mathbf{y}_o}{\mathbf{x}_o}\right]$の特性に“最も近い”DMU$_{ji}$を特定し，DMU$_o$の活動ベクトルを，そのDMU$_{ji}$に対して射影する．射影されたベクトルをv倍して，DMU$_{ji}$と等価になった時のvの逆数（1／v）をDMU$_o$の効率値θ_vとする．

１入力２出力の例を，図２に示す．この例では，非効率的なDMUと似た特性を持つ効率的なDMU，つまり最小の角度ϕを成す効率的なDMUに対して射影をする．

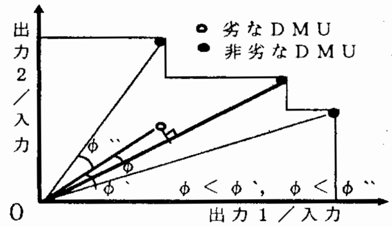

図２　効率値θ_vの図

4． DEAとMOOの比較

4．1． 使用するデータ

ここで［3］の平成７年度の東京都公立図書館調査をもとに，２入力２出力における，DEAとMOOの効率分析に用いるデータを表１に示す．なお，入力は蔵書数（冊），職員数（人），出力は登録者数（人），貸出冊数（冊）とする．

表１　　東京都公立図書館の入出力データ

	渋谷	目黒	新宿	中野	品川	板橋	杉並	練馬	大田	世田谷
蔵書数	543,669	819,923	627,821	801,706	863,199	1023,592	1377,456	1127,228	1417,150	1571,078
職員数	103	111	114	154	149	182	176	212	276	280
登録者数	50,779	99,317	95,396	85,844	52,098	246,135	116,770	266,277	104,021	384,657
貸出冊数	1101,843	2444,791	944,685	1718,101	1561,966	2078,741	3107,23	3818,464	2676,956	4832,079

4．2 DEAの結果

表２にDEAの分析結果を示す．

表２　　DEAの結果

	D効率値	参照集合				D効率値	参照集合	
渋谷	1				板橋	1		
目黒	1				杉並	0.897	目黒	世田谷
新宿	1				練馬	1		
中野	0.840	渋谷	目黒	練馬	大田	0.615	目黒	練馬
品川	0.739	渋谷	目黒		世田谷	1		

ＤＥＡの分析結果によれば，渋谷，目黒，新宿，板橋，練馬，世田谷が効率的と判断される．特に，目黒は，D非効率であるすべての図書館の参照集合になっているので，標準的に優れている図書館と考えられる．

４．３　ＭＯＯの結果

各ＤＭＵ $_j$ の活動ベクトル $\left[\mathbf{y}_j / \mathbf{x}_j\right]$ 間の半順序関係 $\preceq$ をハッセ図で表すと図３のようになる．

このハッセ図により，支配，被支配の関係がわかり，矢印を上にたどっていけばＤＥＡの参照集合に相当するものが求まる．

極大要素である渋谷，目黒，練馬，世田谷は，効率的ＤＭＵと判断される．杉並，品川，大田が非効率的と判断されるのは，どちらの入力項目も出力項目の大きさに比べて大きいからであり，新宿，中野，板橋は，出力項目の貸出冊数が小さいことが主な理由と考えられる．

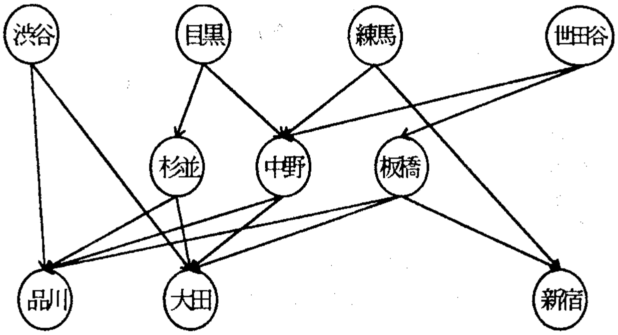

図３　図書館のハッセ図

４．４　ＭＯＯの効率値

ＭＯＯの効率値を表３に示す．また，効率値 θ_V については，非効率的ＤＭＵが射影した効率的ＤＭＵを，ターゲットＤＭＵとして，カッコの中に示す．

表３　　ＭＯＯの結果

	渋谷	目黒	新宿	中野	品川	板橋	杉並	練馬	大田	世田谷
効率値 θ_u	1	1	0.621	0.633	0.582	0.984	0.802	1	0.558	1
効率値 θ_V (ターゲットDMU)	1	1	0.553 (練馬)	0.683 (目黒)	0.453 (渋谷)	0.822 (世田谷)	0.633 (目黒)	1	0.452 (渋谷)	1

このＭＯＯの分析により，渋谷区，目黒区，練馬区，世田谷区が効率的となった．
ＭＯＯで非劣なＤＭＵは，ＤＥＡではD効率的なＤＭＵになっているが，ＤＥＡでD効率的と評価されたＤＭＵのうち，非効率的なＤＭＵに一度も参照されない効率的ＤＭＵは，ＭＯＯでは非効率的ＤＭＵとして評価されている．

５．　まとめ

本研究で取り上げたＭＯＯは，ＤＥＡのように入出力項目を重み付けにより相対的に評価するのではなく，各出力項目を各入力項目ごとの比によって評価しているので，客観的尺度として明快であり，また，評価をした後で，改善目標値の設定等が容易であり，有用であるといえる．

ＤＥＡでは，非負結合によって作られる活動領域の連続性を認めているが，ＭＯＯでは実在するＤＭＵしか認めていない．そのため，本研究で取り上げたＭＯＯの効率値は，実在する効率的なＤＭＵを手本として評価している．一般に，ＤＥＡよりＭＯＯの方が効率的と評価されてたＤＭＵの数が少ないという結果が得られ，ＭＯＯのほうが評価が厳しいという印象を持った．

６．　参考文献

[1] Bitran,G.R. and Valor-Sabater,J.： “SOME MATHEMATICAL PROGRAMMING BASED MEASURES OF EFFICIENCY IN HEALTH CARE INSTITUTIONS”，Advances in Mathematical Programming and Financial Planning，vol 1．PP 61-84, 1987.

[2] 東京都公立図書館長協議会：“東京都公立図書館調査，平成７年度版”

[3] 刀根　薫：“経営効率性の測定と改善－包絡分析法ＤＥＡによる”，日科技連，１９９３．

[4] 中村　治由：“入出力間の相関性を考慮したＤＥＡ－領域限定法の適用－”東京理科大学，経営工学科，１９９４．