グラフ彩色問題のスケジューリングへの適用

〜 時間割を例として 〜

角田 充弘 （沼田 一道 助教授、池辺 淑子 助手）

1．はじめに

グラフ彩色問題（Graph Coloring Problem: GCP）は組合せ最適化における代表的な問題であり、スケジューリング問題などをはじめとして幅広い応用例が知られている。しかし現実の問題には複雑な条件が多々あるので、単純に応用する時は、その条件等を直接考慮することができない。従って、現実問題に応用する時は問題ごとに工夫しなければならない。本研究ではスケジューリング問題をとりあげ、事例（時間割）を通じてより現実に近づけるためにはどうしたらよいのかを研究する。ＧＣＰは計算量的に非常に難しい問題であり、厳密に解く効率の良い解法は知られていない。本研究ではＧＣＰを解くためにメタヒューリスティックの一種であるタブーサーチを用いる。[1、2]

2．　グラフ彩色問題

諸定義

グラフにおけるいくつかの定義や記号を以下に示す。

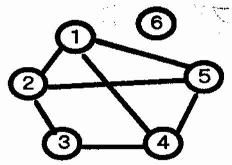
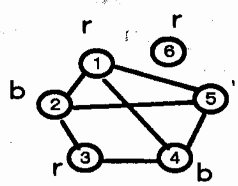


図１　G=(V,E)

V を頂点集合（空でない有限集合）、E を枝集合、とした時、$G=(V,E)$ をグラフと呼ぶ。ここでは、$V=(1,\ldots,n)$ とする。$e=(u,v)$ がG における枝である時、e は頂点u,v と接続しているといい、u,v は隣接していて、かつ e の端点である。任意の２頂点 $u,v\in V, u\neq v$ が隣接しているとき、$G=(V,E)$ を完全グラフという。$G=(V,E)$ におけるクリークとは、頂点$u,v\in V_c$ の全ての組が隣接している頂点部分集合$V_c\subseteq V$ である。また、安定集合とはG において、隣接している頂点の組 u,v が１つもない頂点部分集合 $V_s\subseteq V$ である。

２．１ グラフ彩色問題

以下にグラフ彩色に関するいくつかの定義や記号を示す。



G における 彩色とは、各頂点への色の割当てである。例えば、頂点１に色ｂ、頂点２に色ｒ、．．．を割当てたものは彩色であるが、ここではこの彩色を{(1,b),(2,r),...}と記す事にする。許容彩色とは、隣接する頂点が異なる色をもっている彩色の事であり、最も少ない色数を用いた許容彩色を最小彩色という。

定義　１　グラフ彩色問題（Graph Coloring Problem : GCP）

頂点集合 V 、枝集合 E をもつグラフ $G=(V,E)$ が与えられたとき、G の最小彩色 を見つける。

3．スケジューリングへの応用

表 1 開講べき科目

1年生	1 英語(I) A先生	2 体育 B先生	3 数学 C先生
2年生	4 統計(I) D先生	5 OR(I) E先生	
3年生	6 英語(II) A先生	7 統計(II) D先生	8 OR(II) E先生

表 2 許容な時間割

1時限	英語(I) A先生	統計(I) D先生	OR(II) E先生
2時限	体育 B先生	OR(I) E先生	
3時限	数学 C先生	英語(II) A先生	

本研究では時間割編成に代表されるスケジューリング問題を扱う。この問題は、行うべき科目と、同時に開講できないペアー（受講者あるいは先生が同じ）が与えられ、最小の時限数で許容される時間割を作成する事が目標である。この問題は開講すべき科目を頂点、同時間帯に開講できない科目の組を線で結び、その線を枝とするグラフにおける最少彩色問題に帰着できる。それは、このグラフにおけ許容彩色と、もとの問題（時間割）における許容される時間割は対応するからである。この対応において色が時限に相当する。例えば、行うべき科目が表１で与えられる問題を考えると、そのグラフ及び最小彩色は図３のようになり、この最少彩色から得られる時間割は表２のようになる。

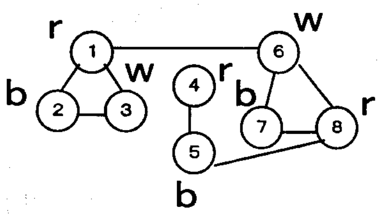


図 3 最小彩色

4．グラフ彩色問題を解くアプローチ

グラフ彩色問題を解き易くするためのアプローチを示すと共に、いくつかの言葉の定義をする。図４のような彩色を与えられた時、

bad edge : 両端点が同じ色をもつ枝

bad vertex : *bad edge* の１つの端点である頂点

bad deg*ree*(i) : 頂点 $i \in V$ に接続している *bad edge* の数

と定義し、以下の問題を考える。

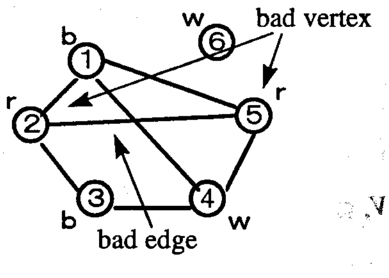


図 4 bad edge .bad vertex の例

定義 2 グラフ彩色問題２ (GCP2)

> 正整数 k （色の数）とグラフ $G=(V,E)$ が与えられたとき、*bad* edge の総数を最小化するような彩色をみつける。

ＧＣＰ２を扱うアプローチは k を固定したアプローチ (Fixed-k approach) と呼ばれている。ＧＣＰ２の費用関数（ *bad* edge の総数）が０になれば、そのグラフがｋ色を用いた許容彩色を持つ。従ってＧＣＰ２の費用関数が０となる最小のｋを求め、そのｋに関して bad edge の数が０となる彩色が見つかればＧＣＰを解く事ができる。この最小のｋを求めるには、ｋを十分大きいところ（頂点数）からはじめ、減少させてＧＣＰ２を反復

して解けば良い。

5．タブーサーチ

タブーサーチはメタヒューリスティックと呼ばれるアルゴリズムの一種である。メタヒューリスティックとは解の精度に理論的な保証のない近似解法で汎用性の高いもの（適用可能な問題が多い）である。メタヒューリスティックのほとんどは局所探索を基礎として構築されている。局所探索とは、ある実行可能解の近傍の中で、その解よりも良い解がみつかればそちらの解に改良する過程を、改良できなくなるまで繰り返す、というものである。局所探索は最適解でない極小解に収束してしまうことがよくあるが、タブーサーチはこれを防ぐために考え出された方法である。この探索の特徴は、解の移動は改悪も許し、禁断リストと呼ばれる、探索の循環を防ぐために１度探索した解を保存するリストを持っている事にある。そして、タブーサーチは近傍から禁断リストを除いた中で、最も良い解に移動する探索である。

6．kを固定したタブーサーチ

k を固定したタブーサーチはＧＣＰに関する局所探索アルゴリズムである。k を固定したアプローチを採用し、タブーサーチＧＣＰ２へ応用する。

6．1　近傍構造

タブーサーチおいて、最も重要な要因は近傍構造である。近傍とは、各彩色について定義され、その彩色に“近い”彩色の集まりである 。与えられている彩色を

$$\Gamma := \{(i, l(i) \mid i \in V\} \quad (\ l(i)\ \text{:頂点}\ i\ \text{の色}\ )$$

とした時、グラフ彩色問題に関する Γ の近傍 $N(\Gamma)$ は

$$N(\Gamma) = \Gamma\text{において、}bad\ \deg ree(i) > 0\text{の頂点を１つだけ色を変えた塗り方全体}$$

である。

6．2　近傍の中の最適な彩色の選び方

近傍の中の最適な彩色は bad degree が最も小さい彩色である。この彩色を計算するために、以下のように $C(i,l)$ を定義する。

i を頂点, l を色かつ $l \neq color(i)$ と定義すると, $C(i,l)$ はi 以外の頂点を固定（fix）して, i だけl に塗り替えた時にi に接続する $bad\ edge$ の数を表す。つまり, i に対してi に隣接する色がl である頂点の数を求める事に等しい。

次に、$C(i,l)$ を最小化するような色を$k^*(i)$ $(\neq color(i))$ として、最も色を塗り替えるのに良い頂点 i^* を見つける。i^* は次に示す候補の中から選ぶ。

i^* ：　bad degree(i) > 0 である頂点の中で、$C(i,k^*(i)) - bad\ \deg ree(i)$ を最少化するような頂点で塗り替えが可能であるもの。

ここで、“塗り替えが可能”であることについては次に述べる。

6．3 解の移動禁止

循環を避けるために1回塗り替えられた頂点に$LS(i)$ を設定する。$LS(i)$ は頂点 i が塗り替えられるのを禁止される残り繰り返し数を保持している。

6．4 停止基準

停止基準は繰り返し回数が 10,000 回まで、もしくは*bad edge* の総数が0になるまでである。

7．実験・結果

表3 最小時間数の許容な時間割

	月曜日	火曜日	水曜日	木曜日	金曜日
	物理学Ⅰ	A中国語	Aフランス語	電子計算機Ⅰ	化学Ⅱ
1時限	経・管理論Ⅰ	基礎数学Ⅰ	B英語Ⅱ	電算機演習	電気工学
		数値解析Ⅰ	原価計算	経・組織論Ⅰ	監査論
	A英語Ⅰ	物理実験Ⅰ	物理学Ⅱ	数学・演習	
2時限	ソフトウエア	電算機Ⅱ	経工実験Ⅰ	O.R Ⅰ	
		生産管理Ⅰ	機械工学Ⅰ	基礎工学Ⅱ	
	電算機Ⅰ	数学演習	体育実技Ⅰ	A英語Ⅱ	
3時限	B英語Ⅲ	製図法Ⅰ	Bドイツ語	作業研究Ⅱ	
	専門文献	経済性Ⅱ	コボル演習	情報工学Ⅰ	
		品質工学			
	Aフランス語	Aドイツ語	化学Ⅰ	数学A−2	
4時限	B英語Ⅰ	統計工学Ⅰ	会計学	工業化学	
	品質管理Ⅰ	数理計画法	経工実験Ⅱ	実験計画法	

東京理科大学工学部第一部経営工学科前期の時間割（科目数 ５２、教員数４２）をデータとして用い、それにkを固定したライフスパン法を適用する。各繰り返し数(1000,2000,3000,4000,5000,10000)について、タブーレングスの数を１０、２０、３０の場合について実験してみた。k＝３０から始め、kを減少させていくと、k＝１７までは*bad edge* の総数が0になるが、k＝１６以降はそれが0にならない。つまり、最適なkは１７である事が判明した。k＝１７の時の時間割を表3に示した。このデータは教室数も十分あるとしている。2時限以上使用する科目も1時限で行える事にしてあり、担当教員が非常勤講師の場合（指定された時限にしか授業を行えない）も考慮しなければならない。以上の足りない点を満たした時間割を作成する事が今後の課題である

【参考文献】

[1] 久保 幹雄，“メタヒューリスティックス”，離散構造とアルゴリズム4，室田 一雄 編 ， 近代科学社 (1995)

[2] Mikio Kubo, Akio Yoshikawa, Katsuki Fujisawa, Susumu Morito, “An Application of the Life Span Method to the Graph Coloring Problem”