# 巡回セールスマン問題に対する発見的解法の提案

## ―多点出発 2-opt 法による Building Block の発見―

児玉 淳 (沼田 一道 助教授、池辺 淑子 助手)

## 1. はじめに

巡回セールスマン問題(Traveling Salesman Problem:TSP)は、訪問対象となる全ての都市を1度ずつ訪問して出発した都市に戻る巡回路の中で、距離や時間等に基づく総移動費用が最小となる巡回路を求める問題である。ここで都市数をnとした場合、巡回路の総数は((n-1)!/2)個存在するが、都市数nが大きくなると、この数は急速に増加する。

TSPは、組み合わせ最適化問題の中でも難しい問題の一つとされ、与えられた都市数に基づく問題規模が拡大すると、巡回路の総数が爆発的に増加するために、全列挙による最適解の探索は事実上不可能となる。そこで、厳密な意味での最適解でなくとも、実用的な計算時間内に準最適解を求める近似解法の研究が進められている。

本研究では、近似解法の枠組みの一つである遺伝的アルゴリズム(Genetic Algorithm:GA)[1]における「世代を重ねるに従い、平均的適応度の高い(よりよい目的関数値を与える)染色体部分列(Building Block:BB)が現れる頻度が増加する。」という仮説[3]に注目し、このBBを直接探索することを試みる。

まず、TSPに対する近似解法である2-opt法[2]を多点から出発して実行することにより、多様性を持った局所最適解を多数求める。これらの中で最良のものから順にいくつかの巡回路を取り出し、その共通部分列をBBとみなす。以下では、このような着想に基づくアルゴリズムを提案し、数値実験を行い、提案したアルゴリズムの有効性を調べる。

## 2. 巡回セールスマン問題(TSP)の定式化

本研究において対象とされるTSPでは、任意の都市間に道が1本存在し、各都市間の移動費用はユークリッド距離で与えられるとする。以下に使用する記号を表記する。

| | | |
|---|---|---|
| $n$ | : | 都市数 |
| $S_n$ | : | $\{1,\cdots,n\}$ の順列(巡回路)全体の集合 |
| $\sigma(i)$ | : | 順列 $\sigma$ において i 番目に訪問する都市 $(i,\cdots,n)$<br>ここで、$\sigma(n+1)=\sigma(1)$ とする。(出発した点に戻ってくる) |
| $C_{ij}$ | : | 都市 i, j 間の移動費用 ($C_{ij}=C_{ji}$、$i,j=1,\cdots,n$、$i\neq j$) |
| $Z$ | : | 巡回路の総移動費用 |

以上より巡回セールスマン問題(TSP)は、次のように定式化される。

$$\text{Minimize} \quad Z = \sum_{i=1}^{n} C_{\sigma(i)\sigma(i+1)}$$
$$\text{Subject to} \quad \sigma \in S_n$$

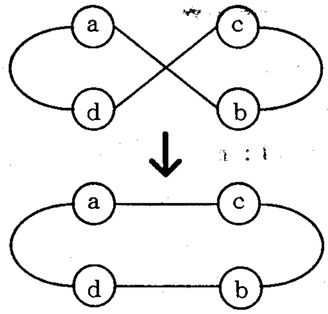

図1 2-opt 法

## 3. 2-opt 法

2-opt 法は、巡回セールスマン問題に対する、近似解法の1つである。2-opt 法とは、右図1の上図ような巡回路において、道 ab、cd を除き、代わりに道 ac、bd を加えたとき、巡回路の長さが減少すれ

ば新しい道に交換する。この操作を長さを減少させる交換がなくなるまで繰り返すという方法である。

2-opt 法は、最悪の場合では指数オーダーの改良回数を要する場合があることが示されており[2]、解の良さに関しては、最適解との比がいくらでも悪くなる局所最適解を作ることができる。

本研究では、出発点となる巡回路によって求まる局所最適解が異なる、ということを利用して 2-opt 法による局所最適解を許容時間内で数多く生成し、最適解に近いもの(巡回路長の短いもの)をいくつか取り上げ、それらを対象として議論を進める。

## 4. 発見的解法の提案

数多くの巡回路の集合の中から巡回路の短いものの集合に注目すると、その都市の並びの順序には、部分的に共通している箇所がある、ということがしばしば起こる。つまり、部分的な都市の並びが、どの巡回路にも共通した並びであれば、その並びが最適解に含まれている可能性が高いと考えられる。従って、この共通した並びが存在したら、これを1つの仮想都市と見なし、都市数を減らし、問題の規模を小さくすることが可能である。

このことは、遺伝的アルゴリズムにおけるスキーマタ定理の平均的適応度の高い部分列が自然淘汰により増加する[1]、ということと対応している。ここで、巡回路長の短い集合の中での共通部分列を、最適巡回路の構成部分である可能性が高いものとして、GA の場合と同様に Building Block (BB)と呼ぶ。

本研究では、多数の出発点(巡回路)から出発する 2-opt 法によって局所最適解の集合を生成し、その集合の中で巡回路長の短いものの集合に注目し、BB を探し出す。ここで、BB を構成している都市数を k 都市とすると、元の n 都市問題は (n-k+1) 都市問題に縮小される。次はこの (n-k+1) 都市問題から BB を探し出し、以上のことを繰り返す。最終的に、全列挙探索が可能となるサイズまで問題の縮約を繰り返し、全列挙をして巡回路長の短いものを選ぶことにより問題を解く。最後に、BB を元に戻し、最初の n 都市問題に戻すと準最適が得られる。以上が我々の提案するアルゴリズム(右図2)である。

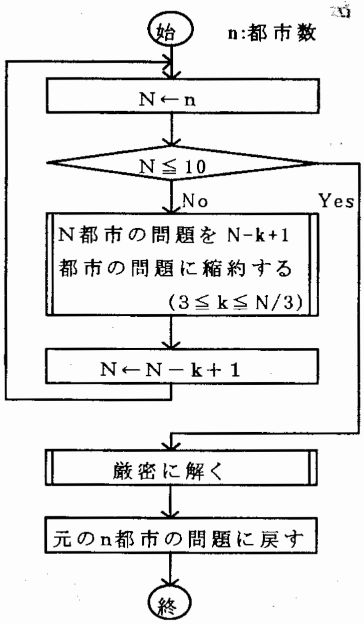


図2 発見的解法のフローチャート

### 4.1 BB の発見について

ここでは、BB を発見する手順を TSPLIB1.2 の bayg29 の問題を例として説明する。

Step 1： m 個の局所最適解の集合を多点出発 2-opt 法により生成し、その集合を U とする。

Step 2： 集合 U から p 個の巡回路長の短いものの集合 Q を取り出す。(右図 3 は bayg29 に対して、m=100,p=5 として求め、p個の局所最適解を重ね合わせたものである。)

Step 3： Step 2 の集合 Q から BB を探す。

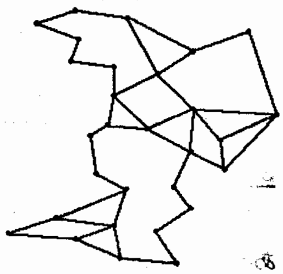

図3　２９都市問題

### 4. 1-1 BBを構成している都市数

1つのBBを構成している都市数をkとし、与えられた全都市数をNとすると、1つのBBの構成都市数の範囲は$3 \leqq k \leqq N/3$とする。

この都市数の範囲は、1つのBBに対して問題の規模を早く小さくするため3都市の縮約を行い、また、都市数がN/3を超えて縮約すると、最適解から離れてしまうおそれがあるためである。そこで、N/3都市を超えた場合は、BBの中央から両側へN/3都市を取り出す。右図4にbayg29の実行結果(図3)からBBを探し出したものを示す。

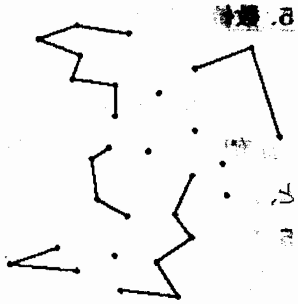

図4　ＢＢ

### 4. 1-2 BBがない場合

対象となっている集合Qのなかで、前述したBBが見つからなかった場合、集合Qの中で、最も巡回路長の長いものを集合Qから1つ除く。これを集合$|Q|=1$になるまで繰り返し行う。最後の1つになった場合は、都市間の費用が最小となっている3都市間を1つのBBとみなして縮約を行う。

### 4. 2 問題の縮約

BBが見つかったら、それを1つの仮想都市とみなす。以下では、仮想都市は、1つの都市であるが両端を持った都市であり、その両端の間に移動費用を持った都市とみなして扱う。まず、最初に与えられた都市数をnとし、n都市問題でのBBの個数をLとする。次に、i番目のBBの構成都市数を$k_i$とすると、BBに含まれる都市の総数は$\sum_{i=1}^{L} k_i$となる。縮約後の都市問題に全BBの両端の都市は残る、ということを考えると、縮約後の都市数Nは、$N=n-\sum_{i=1}^{L} k_i+(2 \cdot L)$となる。縮約後は、N都市問題(全BBの両端の都市を含む)として扱う。

### 4. 3 縮約した都市における2-opt法

縮約後のN都市問題に2-opt法を用いる際、仮想都市は移動費用を持った都市なので通常の2-opt法は使用できない。従って、BBの両端の都市間の費用を0とみなし、両端の都市を結ぶ枝を固定し、その枝の交換を行わない2-opt法を用いる。

N都市問題に前述の多点出発2-opt法を実行し、m個の集合Uから、p個の集合Qを取り出し重ねる。しかし、ここでBB同士を結ぶ枝が存在する場合、両BBのどちらの端の都市を結ぶかは、初期点を発生する際に決められてしまいBB同士を結んだ枝の交換は行われない。しかし、このような巡回路も集合Uの1つとして扱えば、p個の集合Qに含まれる可能性は低い。右図5は、縮約後のbayg29にN=11,m=100,p=5として実行したものを示した。

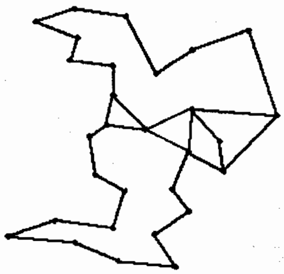

図5　１１都市問題

### 4. 4 厳密に解く

以上のBBの発見と問題の縮約を、仮想都市を含めた都市数が厳密に解けるサイズ(仮想都市を含めて10都市以下)になるまで繰り返し行う。都市数が10都市以下になったら、全列挙探索により、巡回路長の一番短いものを選び、BBを元のn都市の問題に戻し、準最適解を得る。

## 5. 数値実験及び結果

### 5.1 実験方法

TSP の例題は Rice 大学の G.Reinelt による TSP の問題集 TSPLIB1.2 のデータを使用した。

提案した解法が実際にどのくらい有効であるかを調べるため、TSPLIB1.2 に与えられている問題の解答と、提案した解法から得られた準最適解との比率を求めた。

### 5.2 実験結果

計算機実験による結果を表1に示す。表中の時間とは各都市数での100個の局所最適解を生成する時間である。また、得られた準最適解は、10回の試行の平均を示し、表中のカッコ内の数値はその中で最も悪い解を出したときの結果を示した。

表 1　数値実験の結果

| 問題名 | 都市数 | 縮約の回数 | 準最適解 | 最適解 | 準最適解/最適解 | 時間[s] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| bayg 29 | 29 | 2 | 2888.2 (2896) | 2887 | 1.000(1.003) | 1.7 |
| att 48 | 48 | 3 | 10648.5(10707) | 10628 | 1.002(1.007) | 20.5 |

使用したコンピュータは FUJITSU 社の FMV-5133NA2/W(pentium133MHZ)である。プログラム言語として Borland 社の Delphi Version 2.0J を用いた。

## 6. 考察

この結果より、提案した解法はかなり高い割合で最適解を求めているが、一方で、悪い解を示すこともある。この悪い値を示すときは、初期の段階で BB を誤ってしまったときである。また、単独による 2-opt 法で局所最適解を生成すると、最適解から離れた値を求めてしまうということは、多点出発により大域的に探索することで補われている、ということが示された。

## 7. まとめ

本研究では、GA における BB 仮説に着想を得て、多点出発 2-opt 法により共通部分列である BB を直接見つけだす方法を試みた。この方法により、かなり高い割合で最適解を求めた。しかし、BB が発見されると必ず固定されてしまうので、誤った BB が固定されると最適解にはなり得ない。従って、改善策として BB の選び方に工夫が必要であると思われる。これは、TSP の例題 eil51 問題のように、2-opt 法によって求めた局所最適解が、巡回路長の短い解を示したにも関わらず、最適解とは違う巡回の仕方をしたときに起こってしまう。以上のことより、時間が許される限り局所最適解の生成するか、もしくは、BB を構成している都市数 k の下限範囲を 3 都市以上ではなく、もっと増やし、最適解に確実に含まれるBBを探し出す、という方法が挙げられる。

このように、工夫の余地は数多く残されているが、本研究では、「最適解に含まれる BB を多点出発 2-opt 法による局所最適解の中から探し出す」という着想の有効性を確かめることができた。

**【参考文献】**


[1]北野宏明　：　遺伝的アルゴリズム、産業図書、(1994)

[2]久保幹雄　：　巡回セールスマン問題への招待 I・II・III、OR、Vol.37-39、(1994)

[3]和田健之介：　遺伝的アルゴリズムと機械の進化、数理科学、No.328,OCT,(1990)