ポートフォリオ選択のための二つのモデル

水城　伸二　（沼田 一道 助教授，池辺 淑子 助手）

１．はじめに

企業や個人の投資家は、余剰な資産を株式に運用して積極的に利益を追求したい。しかし、将来の株価の動きは、企業の業績など多くの要因の影響により変動するため、高い精度で予測することは難しい。そこで投資家は、資産の安全運用のために、いろいろな銘柄の株式をうまく組み合わせて投資することにより、できるだけ大きな収益を確保しつつ、できるだけリスクを小さくすることを目指す。そして、それらを満たす投資銘柄の組み合わせとその投資比率を求める問題は、ポートフォリオ選択問題と呼ばれる。ポートフォリオ選択問題は、リスクの捉え方によって、いくつかのモデルが考えられている。本研究では、農作物の作付けを計画する時に代表的に用いられている、最低収益率をリスクの指標とするＬＰ（Linear Programming）モデル［２］と、マーコビッツによって創唱され広く知られている方法で、分散をリスクの指標とするMV（Mean-Variance）モデル[1]という二つのモデルで、実際にポートフォリオを求めてみる。また、それぞれのモデルから得られたポートフォリオを比較することによって、ＬＰモデルの妥当性を判断する。さらに、いくつかの投資家の投資態度を考慮したうえでパラメータを設定し、どちらのモデルがより投資家の期待に応えられるかを考察する。

２．ポートフォリオ選択問題の二つのモデル

２．１．ポートフォリオの収益率と期待収益率

ある株式銘柄のある期の収益率は

$$\text{ある期の収益率} = \frac{(\text{期末の株価} - \text{期首の株価})}{\text{期首の株価}} \times 100$$

で定義される。ある期間の収益率の平均は、その銘柄の期待収益率となる。

図１のように、銘柄 $(1,2,\cdots,n)$ にそれぞれ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の比率での分散投資を X と書く。分散投資 X の期待収益率 $E(X)$ は次のように与えられる。まず、過去Ｔ期にわたる第 i 銘柄の収益率の時系列を

$$r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{iT} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

その平均を $\bar{r}_i$ とする。第 i 銘柄の収益率 μ_i は、これらの収益率が、それぞれ $1/T$ の確率で実現する確率変数と考える。このとき、第 i 銘柄の期待収益率は、収益率の平均 $\bar{r}_i$ で表わされ、

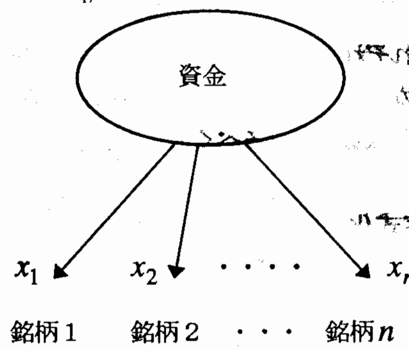

図１．n 個の銘柄に分散投資

$$\bar{r}_i = E(\mu_i) = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T} r_{ik}$$

となる。

よって、分散投資xの期待収益率$E(x)$は、

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i x_i$$

で、与えられる。

一般に、ポートフォリオ選択問題では、期待収益率$E(x)$をできるだけ大きく確保したいと考える。

2．2．二つのモデルにおけるリスク

MVモデルは、分散投資xの収益率$\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i$のばらつき（分散$V(x)$）をリスクと考える。

ここで、第i銘柄の収益率μ_iと第j銘柄の収益率μ_jの共分散をσ_{ij}とすると、分散$V(x)$は次のように書ける。

$$V(x)=E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i-\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i x_i\right)^2\right]=\left[\sum_{i=1}^{n}x_i(\mu_i-\bar{r}_i)\right]\left[\sum_{j=1}^{n}x_j(\mu_j-\bar{r}_j)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j$$

MVモデルでは、収益率のばらつきが大きいとき、リスクが高く投資しづらいと考え、分散$V(x)$のできるだけ小さいポートフォリオを求めることを目標とする。

ＬＰモデルは、分散投資xの収益率$\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i$の最小値（最低収益率R）をリスクと考える。すなわち、最悪の場合でも収益率をできるだけ大きくしようとする考えである。

図１のように分散投資をしたとすると、分散投資xの収益率は

$$\sum_{i=1}^{n}x_i r_{i1},\sum_{i=1}^{n}x_i r_{i2},\cdots,\sum_{i=1}^{n}x_i r_{iT}$$

が、それぞれ$1/T$の確率で実現すると考えるので、この中で一番小さい収益率が、最低収益率Rということになる。ＬＰモデルでは、最低収益率Rが小さいとリスクが高く投資しづらいと考え、分散投資後の最低収益率がなるべく大きくなるようなポートフォリオを求めることを目標とする。

3．定式化

3．1．二つのモデルの共通の制約

図１のように分散投資をする際、二つのモデルともx_iは次の２つの条件を満たさなくてはならない。

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_i=1\\ x_i\geq 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

3．2．MVモデルの定式化

投資家の期待する収益率E_0が与えられたとき、E_0以上の期待収益率を満たすポートフォリオの中で、分散$V(x)$が最小のものを求める問題は、次のように定式化することができる。

$$
\begin{cases}
\text{最小化} & V(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j \\
\text{条件} & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
 & \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i \ge E_0 \\
 & x_i \ge 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)
\end{cases}
$$

これはE_0をパラメータとする２次計画問題である。この問題を解くことにより、投資家の期待する収益率を確保したうえで、リスクを最小にするポートフォリオを求めることができる。

3．3．ＬＰモデルの定式化

投資家の期待する収益率E_0が与えられたとき、E_0以上の期待収益率を満たすポートフォリオの中で、最低収益率Rが最大のものを求める問題は、次のように定式化をすることができる。

$$
\begin{cases}
\text{最大化} & \mathrm{R} = \min\left(\sum_{i=1}^{n} x_i r_{i1}, \sum_{i=1}^{n} x_i r_{i2}, \cdots, \sum_{i=1}^{n} x_i r_{iT}\right) \\
\text{条件} & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
 & \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i \ge E_0 \\
 & x_i \ge 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)
\end{cases}
$$

これはE_0をパラメータとする線形計画問題である。この問題を解くことにより、投資家の期待する収益率を確保したうえで、リスクを最少にするポートフォリオを求めることができる。

4．数値実験

4．1．使用したデータ

以下の数値実験では、日経平均株価に採用されている２２５銘柄の１９８６年1月から１９９０年１２月まで（６０期）の月次収益率データを用いる。

4．2．数値実験内容

実験１　しばしば、株式投資の収益率は預貯金の金利と比べられるが、株式投資はリスクも伴うので比較が難しい、そこで公共性が高く、株主数や発行株式数が多くて、株価の動きがその時の経済状況を反映していると考えられている東京ガスに単独投資した場合の分散と最低収益率、二つのモデルで求まった分散と最低収益率を比較する。

（なお、東京ガスのデータ期間中の期待収益率は2.256％である。よって、二つのモデルにおいてこの期待収益率を満たすときの分散と最低収益率で比較する。）[4]

実験２　投資家の投資態度を考慮するために、期待収益率 E_0 を 2.146%, 2.500%, 3.000%, 3.500%, 4.000%,4.500%,5.000%と変化させ、実験２．１、実験２．２を行う。

実験２．１　二つのモデルで求まった、それぞれの投資銘柄と投資比率で投資をしたときの、分散投資後の月次収益率の分散を比較する。

実験２．２　二つのモデルで求まった、それぞれの投資銘柄と投資比率で投資をしたときの、分散投資後の月次収益率の最低収益率を比較する。

４．３．結果

表１　実験１の結果

期待収益率	分散	最低収益率
東京ガス	255.837	-23.28
MVモデル	22.366	-13.242
LPモデル	44.648	-5.120

表２　実験２．１における二つのモデルの分散の推移

期待収益率	2.146	2.500	3.000	3.500	4.000	4.500	5.000
MVモデル	21.539	24.487	30.388	40.637	55.991	81.736	176.416
LPモデル	40.089	46.133	47.778	65.295	94.288	113.0745	250.788

表３　実験２．２における二つのモデルの最低収益率の推移

期待収益率	2.146	2.500	3.000	3.500	4.000	4.500	5.000
MVモデル	-12.958	-13.874	-15.418	-17.736	-21.786	-24.845	-25.251
LPモデル	-5.093	-5.256	-5.999	-7.209	-11.227	-16.844	-22.682

５．考察とまとめ

実験１では、表１でわかるとおり二つのモデルとも、単独投資にはない低リスクが実現できた。よって、ＬＰモデルは株式への分散投資においても利用できることがわかった。

実験２．１での分散の面からでは、MVモデルのリスクの指標が分散を小さくするということなので、表２からわかるとおりＬＰモデルはMVモデルよりも分散が大きくなる。

実験２．２での最低収益率の面からでは、ＬＰモデルのリスクの指標が最低収益率を大きくするということなので、表３からわかるとおりMVモデルはＬＰモデルよりも最低収益率が小さくなる。
よって、それぞれ自分の指標では優れていることがわかった。

また、ＬＰモデルにおいては、計算がMVモデルより簡単で、リスクの指標が最低収益率を大きくするということで、MVモデルの分散よりわかりやすいという利点があるので、一般の投資家にはこちらのモデルが好まれるとも考えられる。

＜参考文献＞

[1] 津野　義道　：「ポートフォリオ選択論入門」　共立出版（1991）
[2] 南石　晃明　：「確率的計画法」　現代数学社（1995）
[3] 荒井 利浩，田中 靖啓　：「ポートフォリオ選択問題」　東京理科大学卒業論文（1995 年度）
[4] 辻　博康　：「相関係数を用いたポートフォリオ選択モデル」　東京理科大学大学院 工学研究科経営工学専攻 修士論文中間審査資料　（1996 年度）