ＤＥＡの効率値に関する考察
～入力の余剰（出力の不足）がある場合～

山内 克巳 （沼田 一道 助教授, 池辺 淑子 助手）

1. はじめに

ＤＥＡ（Data Envelopment Analysis：包絡分析法）は, 多入力多出力の活動を行う事業体の活動効率を相対的に評価する手法である. ＤＥＡでは分析対象である事業体（ＤＭＵ：Decision Making Unit）ごとに,（重み付き出力和）/（重み付き入力和）を最大にするように各入出力項目に重み付けを行い, その最大値をＤＭＵの効率値（Ｄ効率値）とする. しかし, 重みが0となった項目に入力の余剰, あるいは出力の不足が存在する場合, この効率値は妥当ではない.

そこで, この点を解消するモデルとしてＣＣＲ/CG' モデル[1]が提案されている. このモデルは, 重みに0を許さないことで入力の余剰（出力の不足）を効率値に組み入れ, 一元的な指標を与えている. しかし, このモデルはデータがある条件を満たしていないと適用することができない.

本研究では, ＣＣＲ/CG' モデルが扱えないケースに対して適用できる新たなモデルを提案する.

2. ＤＥＡの概要

ＤＥＡにおいて分析対象である各ＤＭＵは, 同種の入力（複数）と, 同種の出力（複数）を持ち, 入力値, 出力値ともに正値をとる. 今, n 個のＤＭＵがあり, それぞれ m 個の入力項目と s 個の出力項目を持ち, DMU_j $(j=1,\cdots,n)$ の入力データを x_{ij} $(i=1,\cdots,m)$, 出力データを y_{rj} $(r=1,\cdots,s)$ とする. DMU_j の入出力値の並び $(x_{1j},\cdots x_{mj},y_{1j},\cdots y_{sj})$ を DMU_j の活動と呼ぶ. 今, 評価しようとするＤＭＵを DMU_o とし, i 番目の入力項目にかかるウェイトを $v_i(i=1,\cdots,m)$, r 番目の出力項目にかかるウェイトを $u_r(r=1,\cdots,s)$ とすると, すべてのＤＭＵの効率値の上限を1にした上で, ウェイトを非負の範囲で変化させ, 分析対象である o 番目のＤＭＵの効率値を最大にするようなウェイトを求める線形計画問題は < CCR_o > のようになる. またこの < CCR_o > の双対問題は, 実数 θ と非負結合変数 $\lambda_j(j=1,\cdots,n)$ を双対変数として < LP_o > のように書ける.

< CCR_o >

$$\max \quad \theta=\sum_{r=1}^{s}u_r y_{ro} \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m}v_i x_{io}=1 \tag{2}$$

$$\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj} \le \sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij} \quad (j=1,\cdots,n) \tag{3}$$

$$v_i \ge 0 \quad (i=1,\cdots,m) \tag{4}$$

$$u_r \ge 0 \quad (r=1,\cdots,s) \tag{5}$$

< LP_o >

$$\text{第一目的関数} \quad \min \quad \theta \tag{6}$$

$$\text{第二目的関数} \quad \max \quad \sum_{i=1}^{m}S_{xi}+\sum_{r=1}^{s}S_{yr} \tag{7}$$

$$\text{s.t.} \quad \theta x_{io}=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\lambda_j+S_{xi} \quad (i=1,\cdots,m) \tag{8}$$

$$y_{ro}=\sum_{j=1}^{n}y_{rj}\lambda_j-S_{yr} \quad (r=1,\cdots,s) \tag{9}$$

$$\lambda_j, S_{xi}, S_{yr} \ge 0 \quad (j=1,\cdots,n) \tag{10}$$

一般に, このような定式化をするモデルをＣＣＲモデルという.

< CCR_o > の最適値 θ^* と, < LP_o > の第一目的関数の最適値 θ^* は一致する. この θ^* はＤ効率値と呼ばれ, 0から1の間の値をとる. $\theta^*=1$ のとき, DMU_o は一見効率が良いと思われる. しかし, ある入出力項目が非常に不利であるため, ウェイトを0にし, その項目を全く無視することによって $\theta^*=1$ となる DMU_o もありえる. また, Ｄ効率値が同じＤＭＵでも, 入力の余剰（出力の不足）の有無により, 真に効率が等しいとはいえない. この入力の余剰（出力の不足）は, < LP_o > のスラック変数 S_{xi} と S_{yr} の和からなる第二目的関数を用いて検出する. この最適値を $\sum_{i=1}^{m}S_{xi}^*+\sum_{r=1}^{s}S_{yr}^*$ とすると, $\theta^*=1$ かつ $\sum_{i=1}^{m}S_{xi}^*+\sum_{r=1}^{s}S_{yr}^*=0$ である DMU_o をＤ効率的なＤＭＵであ

るといい,$\theta^* < 1$であるか,または$\theta^* = 1$かつ$\sum_{i=1}^{m} S_{xi}^* + \sum_{r=1}^{s} S_{yr}^* > 0$である$DMU_o$をD非効率的なDMUであるという.

3. CCR/CG' モデルの概要

3.1 基本的な考え方

このモデルでは,入力の余剰(出力の不足でも同様である)を効率値に組み入れ,一元的に表現することを考える.

入力の余剰のないDMUの入力を一様にθ^*倍すると,このDMUは効率的フロンティア上にのる(これは効率的フロンティアに対しての評価といえる).しかし,入力に余剰のあるDMU(これをDMU_fと表す)の入力を一様にθ^*倍すると,このDMUは効率的フロンティア上にのらず,入力の余剰が現れる.この入力の余剰を無視するために対応する項目のウェイトが0になるのである.そこで,効率的フロンティアを構成するすべての超平面を列挙し,DMU_fの評価をそれぞれの超平面に対して求め,その中の最大の評価値を効率値とする.

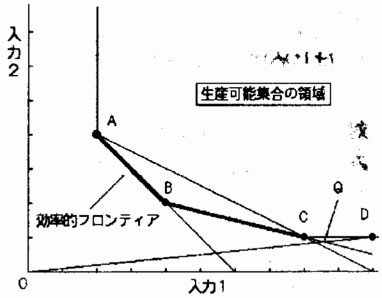

図1 CCR/CG' モデルの考え方の例

図1は,2入力1出力(出力値はすべて同一)の活動を行うDMUを出力1の平面上の点で表したものである.DMU_Dは,従来のCCRモデルに適用すると,$\theta^* = 1$だが入力の余剰が存在することがわかる.これをCCR/CG' モデルに適用すると,効率値は$\frac{OQ}{OD}(< 1)$となる(線BCと線ODとの交点をQとする).

3.2 CCR/CG' モデルの効率値の算出法

まず,入力の余剰(出力の不足)のないDMUの効率値は,従来のCCRモデルから得たD効率値とする.

余剰(不足)のあるDMU_fの評価は< CCR_o >の制約式に,すべてのウェイトが0でない,という条件を付けて適用すればよい.しかしその前に,< CCR_o >の(3)式の中で制約が効いているのは,効率的フロンティアの端点を示すDMUのものだけであるので,他の,制約の効いてない制約式を除くために,このDMUを選別する.それには,効率的フロンティア上にあるDMU(すなわちD効率的なDMU)をDMU_kとし,(11)～(14)式に適用する.$\lambda_k = 1$なら,このDMUは効率的フロンティアの端点を示す(このDMUをEに属するDMUといい,DMU_eと表す).

$$\min \quad \lambda_k \tag{11}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_j x_{ij}\lambda_j = x_{ik} \quad (i = 1, \cdots, m) \tag{12}$$

$$\sum_j y_{rj}\lambda_j = y_{rk} \quad (r = 1, \cdots, s) \tag{13}$$

$$\lambda_j \geq 0 \tag{14}$$

ただし, $DMU_j \in$ D効率的なDMU

これにより,< CCR_o >の(3)式はDMU_eに関するものだけにしてよい.このDMU_eの個数を$|E|$個とすると,< CCR_o >の(3)式は$|E|$個になる.

こうした上で,さらに,すべてのウェイトが0でない,という条件を付ける.これは,「$|E|$個のDMU_eに関する制約式のうち$(m+s-1)$個は等式で成立する(ただし,$|E| - (m+s-1) \geq 0$のとき)」といいかえることができる(m, sはそれぞれ入力項目数,出力項目数).

以上をふまえて,DMU_fを(15)～(23)式に適用し,得られた最適値をDMU_fの効率値とする.

$$\max \quad \theta = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rf} \tag{15}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{if} = 1 \tag{16}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{re} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ie} \leq 0 \quad e \in E \tag{17}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{re} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ie} + M z_e \geq 0 \quad e \in E \tag{18}$$

CCR/CG' モデルでは, このようにして効率値に入力の余剰（出力の不足）を組み入れ, 一元的な指標を与えることができるが, $|E|-(m+s-1)<0$ のとき (15) ～ (23) 式を解くことはできない. すなわち, 効率的フロンティアの端点を示すDMUの数が (入出力項目数) -1 個より少ないとき, このモデルには適用できない. そこで $|E|-(m+s-1)<0$ のときに適用できるモデルを提案する.

$$\sum_{e\in E} z_e = |E| - (m+s-1) \qquad (19)$$

$$v_i \geq 0 \quad (i=1,\cdots,m) \qquad (20)$$

$$u_r \geq 0 \quad (r=1,\cdots,s) \qquad (21)$$

$$z_e \in \{0,1\} \quad e \in E \qquad (22)$$

$$M \gg 0 \qquad (23)$$

4. CCR/N モデル

4.1 基本的な考え方

$|E|-(m+s-1)<0$ のとき, E に属するDMUの数が少なく, 効率的フロンティアを構成する超平面は表現できない. そこで次のように考える.「E に属するすべてのDMUの活動を通る超平面（一意に定まらない）の中で, その超平面に対して効率値を求めたとき, CCRモデルで求めたD効率値からの低下割合の最も大きい DMU_f の低下割合を最小とするような超平面を決め, その超平面に対しての評価値を DMU_f の効率値とする.」

表1は2入力 (x_1, x_2) 1出力 (y) をもつDMUの数値例である. これらにCCRモデルを適用して得られた結果が表2である. E に属するDMUは DMU_1 のみで $|E|-(m+s-1) = 1-(2+1-1) = -1 < 0$ となってしまう. そこで図2のように DMU_1 を通る超平面を考え, それに対し入力の余剰の存在する $\mathrm{DMU}_3, \mathrm{DMU}_4, \mathrm{DMU}_5$ の評価値を考え, D効率値からの低下割合 (それぞれ $1-\frac{OP_1}{OC}/\frac{OC}{OC}, 1-\frac{OP_2}{OD}/\frac{OT_2}{OD}, 1-\frac{OP_3}{OE}/\frac{OT_3}{OE}$) の最も大きいものを最小にする超平面を決める. そしてその超平面に対しての評価値を $\mathrm{DMU}_3, \mathrm{DMU}_4, \mathrm{DMU}_5$ の効率値とする.

表1　数値例1

DMU	1	2	3	4	5
入力1 (x_1)	3	5	7	4	7
入力2 (x_2)	3	5	3	6	4
出力 (y)	1	1	1	1	1

表2　CCRモデルでの結果

DMU	D効率値	余剰		不足
		s_{x1}	s_{x2}	s_y
1	1	0	0	0
2	0.6	0	0	0
3	1	4	0	0
4	0.75	0	1.5	0
5	0.65	2.5	0	0

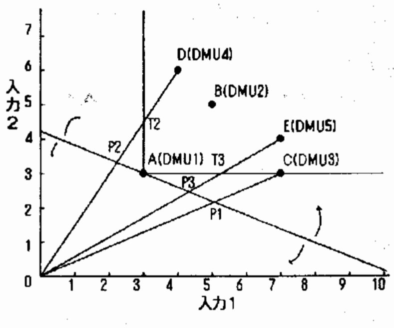

図2 CCR/N モデルの考え方

4.2 CCR/N モデルの効率値の算出法

以上のことを考えて定式化を行う.

$$\min \quad R \qquad (24)$$

$$\text{s.t.} \quad 1 - \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rf} \big/ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{if}}{\theta_f^*} \leq R \qquad (25)$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{re} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ie} = 0 \quad e \in E \qquad (26)$$

$$v_i \geq 0 \quad (i=1,\cdots,m) \qquad (27)$$

$$u_r \geq 0 \quad (r=1,\cdots,s) \qquad (28)$$

$$R \geq 0 \qquad (29)$$

R, v_i, u_r は変数, θ_f^* はCCRモデルで得た DMU_f のD効率値

(24) ～ (29) 式は, DMU_e を通る超平面に対する, DMU_f の評価値のD効率値からの低下割合を R でおさえ, R を最小化することで低下割合の最も大きいものを最小化している. ここで, (25) 式を変形し, さらにスラック変数 S_f を入れて以下のようにかきかえる.

$$(1-R)\theta_f^*\sum_{i=1}^{m} v_i x_{if} - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rf} + S_f = 0 \qquad (30)$$

この(30)式は線形ではないので適用するときには,Rを0～1の間で変化させせながら,固定して線形化し,実行可能解を持つ最小のRを求める.

Rが決まると超平面が決まったことになる.と同時に,(30)式で$S_f = 0$となったDMU$_f$は,この式より効率値が求めることができる（このDMUをDMU$_{f'}$とし,効率値を$\theta_{f'}^*$とする）.さて,この超平面はすべてのDMU$_e$と,DMU$_{f'}$の入力を一律$\theta_{f'}^*$倍したもの（これはD効率的）とで構成される超平面とみることができるので,他の$S_f > 0$となったDMU$_f$に対する効率値は(31)～(36)式を適用して求める.

$$\max \quad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rf} \qquad (31)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{if} = 1 \qquad (32)$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rf'} - \theta_{f'}^* \sum_{i=1}^{m} v_i x_{if'} = 0 \qquad (33)$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{re} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ie} = 0 \quad e \in E \qquad (34)$$

$$v_i \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, m) \qquad (35)$$

$$u_r \geq 0 \quad (r = 1, \cdots, s) \qquad (36)$$

4.2 適用例

表3に先程の数値例1にＣＣＲ/Ｎモデルを適用した結果を示す.

表3 数値例1のＣＣＲ/Ｎモデルでの結果

ＤＭＵ	ＣＣＲ/Ｎ効率値	v_1	v_2	u	ＣＣＲ Ｄ効率値
1	1	—	—	—	1
2	0.6	—	—	—	0.6
3	0.733	0.0668	0.1776	0.733	1
4	0.5501	0.0501	0.1333	0.5501	0.75
5	0.6225	0.0567	0.1508	0.6225	0.65

$R = 0.267$

入力の余剰の存在するDMU$_3$, DMU$_4$,DMU$_5$に対して,入力の余剰を組み入れた効率値を考えることによって,すべてのＤＭＵの評価を一元的な指標で表すことができた.この3つのＤＭＵの効率値は,ＣＣＲモデルのＤ効率値よりも低い値をとっていることがわかる.

しかし,この数値例1からDMU$_4$を除いた4つのＤＭＵのデータにＣＣＲ/Ｎモデルを適用してみると,$R = 0$となり入力の余剰の存在するDMU$_3$, DMU$_5$の効率値はＣＣＲモデルのＤ効率値と同じ値になってしまう.つまり,入力の余剰を効率値に組み入れてないことになる.

5. まとめ

本研究は,ＤＥＡの中で,入力の余剰（出力の不足）を組み入れ,ＤＭＵの評価を一元的な指標で表すＣＣＲ/CG' モデルを取り上げ,このモデルが扱えないケースを数値例によって指摘し,このケースに対して適用できるＣＣＲ/Ｎモデルを提案した.実際のデータにも,参考文献[2]にある自動車メーカーの事例のように,ＣＣＲ/CG' モデルが適用できないものが多くあるので,この提案は非常に有用であると思われる.

しかし,上で述べたように,ＣＣＲ/Ｎモデルを適用して得られた効率値が,ＣＣＲモデルのＤ効率値と同じ値になってしまい,入力の余剰（出力の不足）を組み入れられないようなケースもあり,この点を改善することが今後の課題となる.

＜参考文献＞

[1] Rodney H.Green , John R.Doyle , Wade D.Cook : EFFICIENCY BOUNDS IN DATA ENVELOPMENT ANALYSIS , European Journal of Operational Reserch 89.pp482-490 , 1996.

[2] 刀根 薫 : 経営効率性の測定と改善-包絡分析法ＤＥＡによる-, 日科技連, 1993.