DEAにおける評価の安定性について

横田 敏弘　　(沼田 一道 助教授, 池辺 淑子 助手)

1　はじめに

複数種類の資源を入力し，複数種類の便益を出力する多入力多出力の事業体 (Decision Making Unit:DMU) の効率を相対的に評価する分析方法のひとつに DEA(Data Envelopment Analysis) がある．DEA では，各入力出力項目に重みを掛けた（重みつき出力和）／（重みつき入力和）という比率を用いて各事業体の効率の評価を行なう．各 DMU にとって最も都合の良い重みを選んだときの比率をその DMU の効率値と呼ぶ．

DEA で扱うデータは，あいまいであったり，誤差を含んでいたりする．DEA において，これらの不確定なデータをもとにして得られた「ある DMU が効率的である」という判断は，データの変動にたいして，どれだけ安定であるのか．この問題は，線形計画法における感度解析の一つとみなすことができ，制約式の係数行列が，一斉に変化する場合に相当する．このような場合の感度解析は一般に難しく，面倒である．そこで，係数行列のデータを微少量ずつ変化させていき，効率的な DMU が，変化後も効率的であり続けるようなデータ変化の範囲を求める方法 [2] を取り上げ，実際のデータに対して適用してみる．また，この方法において，最適重み (一意に決まらない) をどのように選ぶかが問題となるが，その選び方を提案する．

また，[2] の方法では，効率的な DMU と非効率的な DMU が入れ替わる場合を扱うが，本研究では，効率的な DMU がさらに効率的になったときに，他の効率的な DMU が非効率的になってしまう場合についても考察する．

2　DEA

DMU の効率は，出力／入力という比率を用いて評価される．しかし，多入力多出力のシステムでは，そのままでは評価できない．DMU の活動は入力が少なく，出力が大きいこと望ましいので，入出力の各項目に重みを掛けて足し合わせて，全ての DMU についてこの（重みつき出力和）／（重みつき入力和）が 1 以下であるという制約のもとで，ウエイトを変化させ，今考えている DMU の比が 1 となるとき，その DMU を効率的であるという．

このとき，この効率値を計算する問題は分数計画問題< FP >によって定式化される．さらに，この< FP >は，目的関数の分母を 1 に固定し分子のみの最大化を考え，制約条件の分母を払って，線形計画問題< LP >に定式化し直すこともできる．

< FP >

$$
\begin{array}{lll}
max & \theta_o = & \sum_{r=1}^{s} u_{ro}Y_{ro} / \sum_{i=1}^{m} v_{io}X_{io} \\
s.t. & & \sum_{r=1}^{s} u_{rj}Y_{rj} / \sum_{i=1}^{m} v_{ij}X_{ij} \leq 1 \\
 & & (j = 1, ..., n) \\
 & & u_r \geq 0 (i = 1, ..., m) \\
 & & v_i \geq 0 (r = 1, ..., s)
\end{array}
$$

< LP >

$$
\begin{array}{ll}
max & \sum_{r=1}^{s} u_{ro}Y_{ro} \\
s.t. & \sum_{i=1}^{m} v_{io}X_{io} 1 \\
 & -\sum_{i=1}^{m} v_{ij}X_{ij} + \sum_{r=1}^{s} u_{rj}Y_{rj} \leq 0 \\
 & (j = 1, ..., n) \\
 & u_r \geq 0 (i = 1, ..., m) \\
 & v_i \geq 0 (r = 1, ..., s)
\end{array}
$$

ここで用いる記号は，

n : DMUの数　　m : 入力項目の数

s : 出力項目の数　　j : DMUの番号

o : 分析対象の DMU

X_{ij} : DMU_jの i 番目の入力値　　Y_{rj} : DMU_jの r番目の出力値

v_i : 入力につける重み $(i = 1, ..., m)$　　u_r : 出力につける重み $(r = 1, ..., s)$

である．

3 安定性の見積り [2]

ここでは，効率的な DMU と非効率的な DMU の効率値が入れ替わるようにデータを変化させて，ある DMU が効率的であるという判断がどれだけ安定か，以下の手順で調べる．

3.1 効率的な DMU の重みで他の DMU の入出力の比を計算する

＜ LP ＞を解いた結果，$\mathrm{DMU_o}$が効率的と判断され，その比率 1 を与える重み（のひとつ）が $\omega^* = (u^*, v^*)$，$\mathbf{u}^* = (u_1, ..., u_s)$,$\mathbf{v}^* = (v_1, ..., v_m)$ であるとする.「$\mathrm{DMU_o}$が効率的である」という評価は，このω^*を用いて他の $\mathrm{DMU_j}$の効率値を計算した値 $h_j(\omega^*) = \sum_{r=1}^{s} u_{rj}Y_{rj}/\sum_{i=1}^{m} v_{ij}X_{ij}$と $h_o(\omega^*) = 1$ の大小関係によって決まることに着目する．

3.2 $h_j(\omega^*)$ をもとに活動データを一斉に変化させて，$\mathrm{DMU_o}$が効率的であるという判断がどこまで安定かを調べる

データ全体に不確定さがあると考え，以下のようにデータを変化させ，$\mathrm{DMU_o}$が効率的であるという判断が変わらない範囲を調べていく．

効率的な $\mathrm{DMU_o}$の活動のデータ (X_o, Y_o)（ここで，効率的な $\mathrm{DMU_o}$は複数個数存在する）の入力値を増加させて，そのときの活動データを (X'_o, Y'_o) とし，複数個存在する非効率的な DMU の活動データの入力値を減少させる．そして，3.1 で定義した $h_o(\omega^*)$, $h_j(\omega^*)$ を変化後のデータについて計算し，これを $h'_o(\omega^*)$, $h'_j(\omega^*)$ とする．

そしてここで，ω^*に関して，効率的な $\mathrm{DMU_o}$の $h'_o(\omega^*)$ が，上記のようにデータを変化させた後も，他の $\mathrm{DMU_j}$の $h'_j(\omega^*)$ に比べて一番大きいとき，$\mathrm{DMU_o}$は効率的なままである．なぜならば，重み (u^*, v^*) について，効率的な $\mathrm{DMU_o}$の $h'_o(\omega^*) = \frac{u^*Y'_o}{v^*X'_o} = \alpha$とするとき，$u' = u^*, v' = \alpha v^*$ として，この式に代入すると，$\frac{u'Y'_o}{v'X'_o} = 1$ となり，また，$h'_j(u^*, v^*) = \frac{u^*Y'_j}{v^*X'_j} \le h'_o(u^*, v^*)$ の関係より，$\frac{u'Y'_j}{v'X'_j} \le 1$ ということがいえ，変化後の活動 $\mathrm{DMU'_o}$も効率的であるといえる．この考えに基づいて，$\mathrm{DMU_o}$が効率的であるという判断がどこまで安定かを調べていく．

3.3 数値例

2 入力 1 出力で DMU が 6 個の場合の数値例を表 3.1 に示す．この場合，$\mathrm{DMU_1}$,$\mathrm{DMU_2}$,$\mathrm{DMU_3}$が効率的であるので，$\mathrm{DMU_1}$,$\mathrm{DMU_2}$,$\mathrm{DMU_3}$を分析対象とした＜ LP ＞の最適解を表 3.2 のように選んでくる [2].

表 3.1

	DMU_j	1	2	3	4	5	6
入力	x_1	4	2	1	2	3	4
	x_2	1	2	4	3	2	4
出力	y	1	1	1	1	1	1

表 3.2

$\mathrm{DMU_j}$	u	v_1	v_2
$\mathrm{DMU_1}$	1.000	0.100	0.600
$\mathrm{DMU_2}$	1.000	0.200	0.300
$\mathrm{DMU_3}$	1.000	0.600	0.100

ここで，$\mathrm{DMU_1}$,$\mathrm{DMU_2}$,$\mathrm{DMU_3}$に対する＜ LP ＞の最適解をそれぞれω_1,ω_2,ω_3とし，それぞれに対する各$\mathrm{DMU_j}$の効率値を求めると，表 3.3 のようになり，この最適解に対して，データを 1%ずつ変化させ，10%に達すると，表 3.4 のようになる．

表 3.3

$\mathrm{DMU_j}$	$h_j(\omega_1)$	$h_j(\omega_2)$	$h_j(\omega_3)$
$\mathrm{DMU_1}$	1.000	0.909	0.400
$\mathrm{DMU_2}$	0.714	1.000	0.714
$\mathrm{DMU_3}$	0.400	0.625	1.000
$\mathrm{DMU_4}$	0.500	0.769	0.667
$\mathrm{DMU_5}$	0.667	0.833	0.500
$\mathrm{DMU_6}$	0.357	0.500	0.357

表 3.4

$\mathrm{DMU_j}$	$h_j(\omega_1)$	$h_j(\omega_2)$	$h_j(\omega_3)$
$\mathrm{DMU_1}$	0.909	0.826	0.364
$\mathrm{DMU_2}$	0.649	0.909	0.649
$\mathrm{DMU_3}$	0.364	0.649	0.909
$\mathrm{DMU_4}$	0.556	0.855	0.741
$\mathrm{DMU_5}$	0.741	0.926	0.556
$\mathrm{DMU_6}$	0.397	0.556	0.397

表 4.4 より，10%まで変化させると，$h_j(\omega_2)$ の中で一番大きかった $h_2(\omega_2)$ が変化後一番大きくはなくなっているので，DEA による評価は変わってしまっているといえる．
同様のやり方で，9%から 10%の間を 0.05%刻みで調べていくと，約 9.05%で，$h_2(\omega_2)$ と $h_5(\omega_2)$ がちょうど入れ替わる．この場合，効率的であるという評価は，少なくとも約 9.05%までの誤差を含んでいても不変であるということができる．

4　最適重みの選び方

$h_j(\omega^*)$ を計算するには最適重みが必要である．この重みは「効率的であるという評価をできるだけ長い範囲で保証できるように選びたい．ここでは，次の数理計画問題を解いて得られる重みを用いることを提案する．

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \max\left\{\frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rj}Y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} u_{ij}X_{ij}} | j \notin \mathrm{K}\right\} \\
s.t. \quad & \sum_{r=1}^{s} u_{ro}Y_{ro} = 1 \\
& \sum_{i=1}^{m} v_{io}X_{io} = 1 \\
& -\sum_{r=1}^{s} u_{rj}Y_{rj} + \sum_{i=1}^{m} u_{ij}Y_{ij} \leq 0 \\
& \qquad (j = 1, ..., n) \\
& u_r \geq 0 \quad (r = 1, ..., s) \\
& v_i \geq 0 \quad (i = 1, ..., m)
\end{aligned}
$$

左の式では，複数個存在する非効率的な DMU の効率値の一番大きいものを最小化することによって，データを変化させたとき効率的な DMU と非効率的な DMU の効率値との大小関係を最も入れ替わりにくくする．

こうすることにより，$\mathrm{DMU_o}$を分析対象としたときの最適重みの集合の中から，データを変化させたとき効率的であるという評価をできるだけ長い範囲で保証できる重みを選ぶことができる．

ここで，K は効率的な DMU の集合
表 3.1 のデータを適用したとき，$\mathrm{DMU_1}$,$\mathrm{DMU_2}$,$\mathrm{DMU_3}$を分析対象とした＜ LP ＞の最適解は，

それぞれ$\omega_1 = (1.000, 0.000, 0.100)$,$\omega_2 = (1.000, 0.250, 0.250)$,$\omega_3 = (1.000, 1.000, 0.000)$ となり，これに関して効率値を求め，データを変化させていくと，約 11.1%で，$h_2(\omega_2)$ と $h_4(\omega_2)$ $h_5(\omega_2)$ がちょうど入れ替わり，効率的であるという評価は，少なくとも約 11.1%までの誤差を含んでいても不変であるということができる．先ほどの 9.05%よりも長い範囲で保証できたことになる．

5　ある効率的な DMU がさらに効率的に変化する場合について

ここでは，前節で求めた範囲内で，ある効率的な DMU がさらに効率的に変化した場合に，効率的であるという評価が変わってしまうことがあるか 3.3 節の例の場合について調べる．

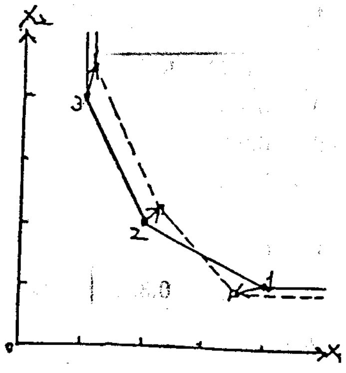

図 1　DMU$_1$

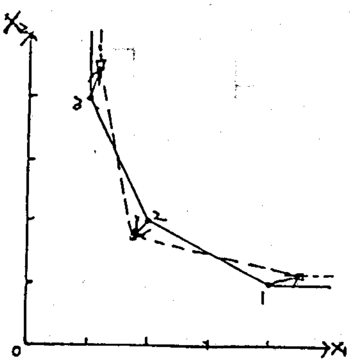

図 2　DMU$_2$

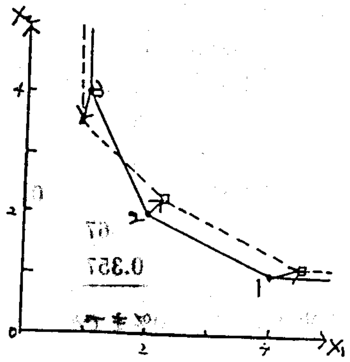

図 3　DMU$_3$

これらの図は，活動 1，2 をそれぞれさらに効率的な方向に他の活動を非効率的な方向に 11.1% 動かしたときの図である．図からもわかるように，評価は変化前と同じままである．

6　結果及び考察

本研究では，まず効率的な DMU と非効率的な DMU が，入れ替わるように動かして評価がどこまで安定か調べた．調べていく上で，重みの選び方が問題となるので，有効な重みを選んでくる方法を提案した．この方法による結果を 3.3 の数値例のように適当な重みを用いた場合と比較したとき，評価が不変であることを保証できる範囲はより広くなり，また，実際に効率的な DMU と非効率的な DMU が入れ替わる範囲と等しいことからも評価保証のための重みを選んでくる方法として有効であると思われる．

また，ある効率的な DMU がさらに効率的に変化させてどれだけ安定であるか調べた．その結果，例の場合では評価が変わってしまうまでの範囲は，効率的な DMU と非効率的な DMU が，入れ替わるように動かした場合よりも広くなることがわかる．

7　参考文献

[1] 刀根 薫:経営効率性の測定と改善—包絡分析法 DEA による—, 日科技連,1993.

[2]Thompson,Dharmapala and Thrall: Sensitivity Analysis of Efficiency Measures with Appri-cations to KANSAS FARMING and COAL MINING, in Data Envelopment Analysis,Kluwer Academic Publishers,1994.

[3]Rodney H.green,John R.Doyle,Wade D.Cook: Effficiency bounds in Data Envelopment Anal-ysis, Eurpean Journal of Operational Reserch 89,1996.