

AHPにおけるウェイトの感度解析の有効性について

神山 剛 (沼田 一道 助教授)

1.はじめに

複数の評価基準が内在する意志決定問題において、最も望ましい代替案を導出する方法に AHP (Analytic Hierarchy Process) [1, 2] がある。AHP による評価分析を成功させるためには、意思決定者の潜在的な価値観を、各評価基準および代替案の重要度 (ウェイト) に正確に反映させることが必要である。意思決定者はウェイトを決定するために一対比較を行うが、一対比較の判断に自信の持てない場合が度々起こる。そのため、得られた各代替案の総合ウェイトに大きな差がみられなかった場合、代替案の決定を、得られた総合ウェイトによって判断してよいものか疑わしいといった問題が生じる。このような場合に、各評価基準のウェイトの変化が代替案の選好順位にどのような影響を与えるのかといったウェイトの感度解析を行うことができれば、一対比較の再検討が容易になり、より正確な代替案の決定を行うことができる。

そこで本研究では、AHP をスキー板選択問題に適用し、そこで得られた各評価基準の重要度 (ウェイト) の感度解析を行い、より信頼のおける AHP の結論を導くことを目的とする。

2.AHPの概要

意思決定にはまず“問題”があり、そして最終的な選択の対象となるいくつかの“代替案”がある。代替案の中から一つに絞り込むために両者間に“評価基準”が存在する。図1に表されたこのような表現法を階層図と呼ぶ。階層図はレベルと要素 (“問題”、“評価基準”、“代替案”) と上下の要素を結ぶ線から成る。上の要素を親要素、下の要素を子要素と呼ぶ。なお、図中の“評価基準11”、“評価基準12”は、“評価基準1”に対する詳細な評価基準として定義される。また、評価基準に対して詳細な評価基準が存在しない場合、ダミー要素を挿入する。(本例の場合、第3レベルにおける“評価基準2”がこれに相当する。)

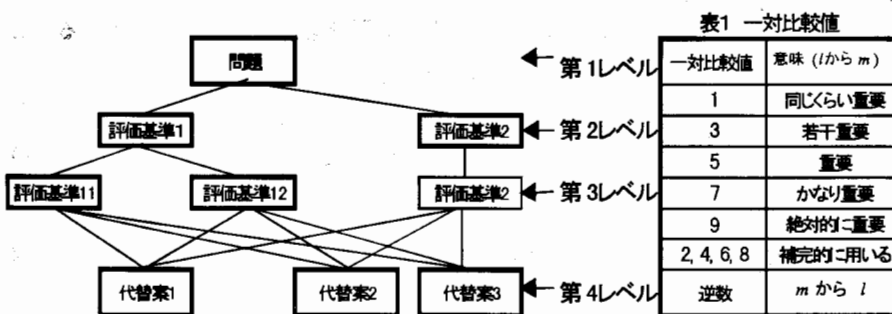


図1 階層図

次に各レベルの要素につき、親要素に関する一対比較を行う。要素*i*から見て要素*m*がどの程度重要かといったことを表1に示された1~9の整数とその逆数で表し、一対比較値 c_{im} とする。一般的にこの操作を第*k*-1レベルの*j*番目の親要素に対するすべての子要素に行うことによって、一対比較行列 $C_{kj} = [c_{im}]$ が作成できる。さらに各一対比較行列について、ウェイトを求めるために一対比較行

列の最大固有値に対応する固有ベクトルを求める。固有ベクトルの各要素の和が 1 になるように正規化したものをウエイトベクトルと呼び、親要素に対する子要素の相対的な重要度を表す。ここで、一般的に n_k を第 k レベルに属する要素の総数と定め、第 $k-1$ レベルの j 番目の要素に関する第 k レベルのウエイトベクトルを $\mathbf{a}_{kj} = [a_1^{(kj)} \dots a_{n_k}^{(kj)}]^T$ とし、この \mathbf{a}_{kj} よりレベル間ウエイト行列 $A_k = [a_{k1} \dots a_{kn_{k-1}}]$ が得られる。次にこれを用いて各レベルの要素の総合ウエイトベクトル \mathbf{w}_k を次式によって合成する。

$$\mathbf{w}_k = A_k \mathbf{w}_{k-1} = A_k A_{k-1} \dots A_2 \mathbf{w}_1 \quad k = 2, \dots, L \quad (L: \text{階層図のレベル数}) \quad (1)$$

したがって代替案の総合ウエイトベクトルは次式のようなになる。

$$\mathbf{w}_L = A_L A_{L-1} \dots A_2 \mathbf{w}_1 \quad (2)$$

3. ウエイトの感度解析

3.1 \mathbf{a}_{kj} の変化に対する \mathbf{w}_L の変化

AHP を実行したとき、一対比較によって得られた \mathbf{a}_{kj} の値に自信のもてない場合が起こり得る。このような場合に \mathbf{a}_{kj} の変化量に対する \mathbf{w}_L の変化量を解析的に求めることが可能な次式を利用することによって、一対比較の再考を容易にすることができる。

$$\mathbf{w}_L + \Delta \mathbf{w}_L = \mathbf{w}_L + A_L A_{L-1} \dots A_{k+1} \Delta A_k \mathbf{w}_{k-1} \quad (\Delta A_k = [0 \dots 0 \Delta a_{kj} 0 \dots 0]) \quad (3)$$

3.2 写像領域 $\Gamma_L(\mathbf{a}_{kj})$ 感度係数 $\alpha(\mathbf{a}_{kj})$

次に、 \mathbf{a}_{kj} が変化した場合に対する \mathbf{w}_L の要素内における順位変動を考える。次式により、総合ウエイトベクトル空間 (\mathbf{w}_L の各要素を座標軸とした空間) に \mathbf{w}_L の変化可能な領域を凸多面体として写像することによって、順位変動の様子を見ることができる。この領域を写像領域 $\Gamma_L(\mathbf{a}_{kj})$ と呼ぶ。

$$\Gamma_L(\mathbf{a}_{kj}) = \{ \mathbf{w}_L; \mathbf{w}_L = \sum_{i \in I_{kj}} b_i a_i^{(kj)}, \sum a_i^{(kj)} = 1, a_i^{(kj)} \geq 0 \} \quad \begin{aligned} b_i &= (A_L A_{L-1} \dots A_{k+1}) A_k^* \mathbf{w}_{k-1} \\ A_k^* &= [a_{k1} \dots a_{kj-1} e_i a_{kj+1} \dots a_{kn_{k-1}}] \end{aligned} \quad (4)$$

なお、 b_i は凸領域の単点をあらわしている。

3.3 感度係数 $\alpha(\mathbf{a}_{kj})$

最後に、一対比較値の再検討を容易にするために、 \mathbf{w}_L に大きな影響を及ぼす要素を検出することを考える。そこで次式に示されている感度係数 $\alpha(\mathbf{a}_{kj})$ を利用する。

$$\alpha(\mathbf{a}_{kj}) = \sqrt{\{1/n(I_{kj}) - 1\} \sum_{i \in I_{kj}} (b_i - \bar{b})^T (b_i - \bar{b})} \quad \begin{aligned} I_{kj}: & \text{第 } k \text{ レベルの } j \text{ 番目の要素と親子関係にある第 } k \text{ レベル} \\ & \text{の子要素の添字集合} \\ n(I_{kj}): & \text{集合 } I_{kj} \text{ に属する要素の総数} \end{aligned} \quad (5)$$

上式は、前節で得た写像領域 $\Gamma_L(\mathbf{a}_{kj})$ の単点 b_i のばらつき具合を表しており、この値が大きければ大きいほど、代替案の総合ウエイトベクトルに及ぼす影響は大きいと考えることができる。

4. スキー板選択問題への適用

本章では、前章で得た各式をスキー板選択問題に適用して重要度 (ウエイト) の感度解析を試みる。

4.1 問題設定

今、一人の意思決定者がスキー板の購入を考えている。彼は、情報誌、周りの人々のアドバイスから候補として三つのスキー板 A、B、C を選択した。そして、これら三つの代替案の選好順位を AHP

を適用して決定することにした。

4.2 階層図、総合ウエイトベクトルの作成

彼は、スキー板の選定において、大まかな評価基準として“価格”、“性能”、スキー板を開発したメーカーの“実績”を考へており、さらに“性能”、“実績”の詳細な評価基準として“安定性”、“滑走性”、“操作性”、“販売実績”、“選手の実績”を設定することにした。そこで階層図を図2のように作成し、一対比較の結果得られた代替案“A”、“B”、“C”の総合ウエイトベクトルは、 $w_4 = [0.418 \ 0.300 \ 0.282]$ となった。

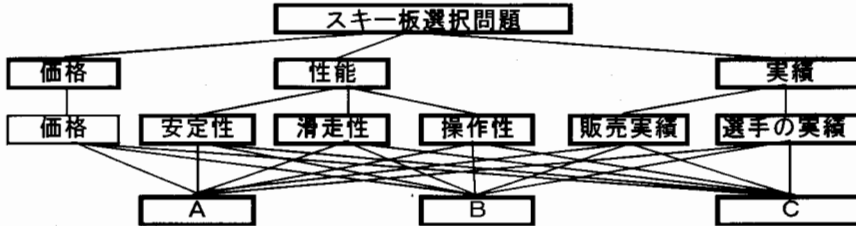


図2 階層図

4.3 感度解析の適用

前節で求めた総合ウエイトベクトルより代替案Aに対するウエイトが最も大きいことが分かる。しかし、意思決定者にとってこの分析結果に従い代替案Aを選択するのは危険である。その理由は三つの代替案の総合ウエイトベクトルの要素の値には大きな差が見られず、意思決定者は一対比較値を主観的判断に基づいて決定しているため、不正確な判断を下している可能性があるからである。そこで、前章で示した(3),(4),(5)式を利用して、各ウエイトベクトルに対して感度解析を試みる。

まず(5)式を利用して、各ウエイトベクトル a_{kj} に対する感度係数 $\alpha(a_{kj})$ を求め表2に示す。次に(4)式を利用して求めた $a_{21} \sim a_{46}$ の写像領域を図3に示す。

表2 各ウエイトベクトルにおける感度係数の値

| ウエイトベクトル | a_{21} | a_{32} | a_{33} | a_{41} | a_{42} | a_{43} | a_{44} | a_{45} | a_{46} |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\alpha(a_{kj})$ の値 | 0.263 | 0.283 | 0.071 | 0.138 | 0.192 | 0.071 | 0.363 | 0.158 | 0.077 |

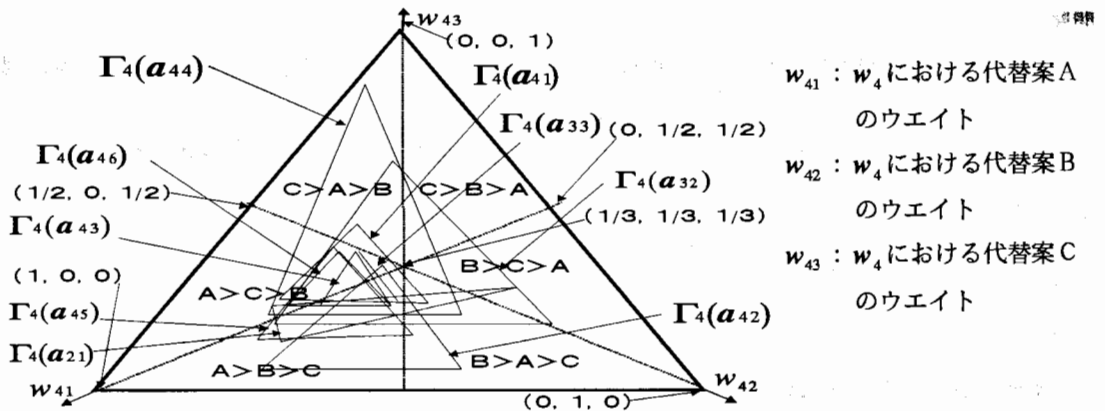


図3 各 a_{kj} に対する写像領域 $\Gamma_L(a_{kj})$

表2より a_{33} (実績)、 a_{43} (滑走性)、 a_{46} (販売実績)に対する感度は極めて低いことが分かり、また図3よりどんなにウエイトベクトルの値を変化させても総合ウエイトベクトルの値において代替案Aを代替案B、Cが上回る可能性がないことが分かった。逆に a_{32} (性能)、 a_{44} (安定性)に対する感度は極めて高く、あらゆる選好順位をとる可能性があることが分かった。そこで(5)式を利用して、 a_{32} 、 a_{44} がどの程度変化すれば順位の逆転が起こるのか調べてみることにした。それぞれの結果を表3、表4に示す。

表3 ウエイトベクトルの変化に対する総合ウエイトベクトルの変化(性能)

| | Δa_{32} | | | | | | $w_4 + \Delta w_4$ | | |
|---|-----------------|-------|-------|-------|---|---|--------------------|-------|-------|
| ① | 0 | 0.15 | -0.05 | -0.1 | 0 | 0 | 0.393 | 0.283 | 0.324 |
| ② | 0 | -0.1 | -0.1 | 0.2 | 0 | 0 | 0.479 | 0.281 | 0.24 |
| ③ | 0 | -0.05 | 0.15 | -0.1 | 0 | 0 | 0.381 | 0.337 | 0.282 |
| ④ | 0 | 0.05 | 0.2 | -0.25 | 0 | 0 | 0.337 | 0.345 | 0.319 |

表4 ウエイトベクトルの変化に対する総合ウエイトベクトルの変化(安定性)

| | Δa_{42} | | | $w_4 + \Delta w_4$ | | |
|---|-----------------|-------|------|--------------------|-------|-------|
| ① | 0.15 | -0.05 | -0.1 | 0.472 | 0.282 | 0.246 |
| ② | -0.2 | 0.1 | 0.1 | 0.345 | 0.337 | 0.318 |
| ③ | -0.25 | 0.2 | 0.05 | 0.327 | 0.373 | 0.3 |
| ④ | -0.2 | 0.15 | 0.05 | 0.345 | 0.355 | 0.3 |

表3の④で、代替案Aと代替案B総合ウエイトベクトルの値における順位の逆転が起こっているが、“操作性”に対するウエイトを25%下げ、“滑走性”に対するウエイトを20%上げるという大幅な変更を伴っている。意思決定者が不正確な一対比較値の決定をしているとはいえ、それほど大幅に決定を変更することは、ありえないと思われる。従って、他の①～③が示しているような若干の変化のもとでは選好順位の変更はなかったので a_{32} についても再考を要さないことがわかった。表4についても③、④で選好順位の変更がみられるが、表3と同じ理由で再考を要さないことがわかる。

以上の解析結果より意思決定者は代替案Aの選択に自信を持つことができるようになった。

5.おわりに

本研究では、AHPにおける重要度(ウエイト)に感度解析を取り上げ、その手法を“スキー板選択問題”に適用した。一対比較行列の最大固有値の値からその整合性を調べることはよく行われているが、本研究で取り上げた感度解析は「判断のあいまいさ」を見直す手段として有効であることを確認した。

今後の課題として、感度解析を利用して階層図の妥当性を調べることなどが挙げられる。

参考文献

- [1] 刀根 薫：ゲーム感覚意思決定法，日科技連，1986.
- [2] 刀根 薫，真鍋 龍太郎：AHP事例集，日科技連，1990.
- [3] 増田 達也，藤井 克彦：Analytic Hierarchy Process (AHP)におけるプライオリティの感度解析，計測自動制御学会論文集，pp.58-65，昭和62年.