ポートフォリオ選択問題への改良GI法の適用

古賀 万之・西岡 毅（沼田 一道助教授）

1. はじめに

現在最も求められているものの1つが資産の安全運用であろう.「リスクは小さく，収益は大きく」を目標にする資産運用が希求されている．そこで，株式の分散投資理論を確立したMarkowitzのポートフォリオ選択理論に着目し，本研究の題材とした.

ポートフォリオ選択問題に対するMarkowitzモデルは，凸2次計画問題として定式化される [4, 6]. 本研究の目的は，特別なパラメトリック狭義凸2次計画問題を効率よく解くための数値解法を提案し，Markowitzモデルに適用して，効率的フロンティアや最小分散点を求めることである．提案する解法はGoldfarb-Idnani法（以下GI法）[2] を改良したものであり，数値実験を通してその有効性を検証する.

さらに，Markowitzモデルとは別のモデルとして満足水準達成確立を最大化する計画法 [5] を考え，GI法の改良版を用いてこの問題を効率よく解くアルゴリズムを提案する.

2. Markowitzモデルの定式化

各証券銘柄の各期の収益率を「（期末の株価－期首の株価）÷ 期首の株価」で定義する．証券数をnとし，第i証券の過去N期にわたる収益率の時系列を$r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{iN}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とする．第i証券の収益率π_i(確率変数) は，これらの値を等確率（各々$1/N$）でとると仮定する．このとき第i証券の期待収益率μ_iは,

$$\mu_i = E[\pi_i] = \frac{1}{N}(r_{i1} + r_{i2} + \ldots + r_{iN})$$

で与えられる．ここで全銘柄にわたる収益率と期待収益率のベクトルをそれぞれ, $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)^T \in R^n$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T \in R^n$ とする．また，第i証券への投資比率をx_iとし，空売りは考慮しない状況（すなわち，$x_i \geq 0$）を取り扱えば，次の条件が得られる.

$x \geq 0, \quad e^T x = 1, \quad$ ただし, $\quad x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in R^n, \quad e = (1, \ldots, 1)^T \in R^n$

この条件を満たす$x = (x_1, \ldots, x_n)^T$を「ポートフォリオ」と呼ぶ．ポートフォリオxの収益率が$\pi^T x$で与えられることに注意すれば，その期待値と分散は,

$$\text{期待収益率} = E[\pi^T x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = \mu^T x$$

$$\text{分散} = E[(\pi^T x - \mu^T x)^2] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}(r_{il} - \mu_i)(r_{jl} - \mu_j)\right)x_i x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j = x^T C x$$

で与えられる．ここでは，Cはσ_{ij}を成分とする各銘柄の時系列データの分散共分散行列とする.

期待収益率の下限$E(E > 0)$ が与えられたとき，効率的ポートフォリオは，E以上の期待収益率を持つものの中で分散が最小になる投資比率xとしてとらえられる．このことを考慮して，Markowitzはポートフォリオ選択問題を次のように定式化した.

問題 1 （Markowitzモデル）

Eを正のパラメータとしたとき,

制約条件 $\quad x \geq 0,\ e^T x = 1,\ \mu^T x \geq E \quad$ の下で,

目的関数 $\quad x^T C x \quad$ をxについて最小化せよ.

ここで，$r_i = (1/\sqrt{N})(r_{i1} - \mu_i, r_{i2} - \mu_i, \ldots, r_{iN} - \mu_i)^T \in R^N$ としたとき，行列Cが正定値となるための必要十分条件は$r_1, r_2, \ldots, r_n$が1次独立になること，及び，$V(x)$が狭義凸関数であるための必要十分条件は行列Cが正定値であることが知られている．このことを踏まえて，以下では$n < N$の場合を考える.

3. パラメトリック狭義凸2次計画問題を解くためのGoldfarb-Idnani（GI）法について

狭義凸2次計画問題の有効な解法の1つとしてGI法がある [2]. Markowitzモデルの目的関数の行列Cが正定値ならば，問題1はパラメトリック狭義凸2次計画問題になる．そこでGI法をMarkowitzモデル

へ適用することを考える．以下では，まず一般の狭義凸2次計画問題に対するGI法を説明する．次に，GI法をパラメータEを含むMarkowitzモデルへ適用し，効率よく解くための工夫について述べる．

3.1 （狭義凸2次計画問題の定式化）

狭義凸2次計画問題は，一般に次のように定式化される：

n次正定値対称行列G, n次元定数ベクトルa, $c_i (i=1,...,m)$，定数$b_i (i=1,...,m)$が与えられたとき，

不等式制約条件　$c_i{}^T x \le b_i,\ i=1,...,m$　のもとで，

狭義凸2次関数　$f(x) = \frac{1}{2}x^T G x + a^T x$　を$x \in R^n$について最小化せよ．

3.2 一般の狭義凸2次計画問題に対するGI法（オリジナル版）

狭義凸2次計画問題の有効な解法であるGI法のアルゴリズムは，以下のように与えられる[1，2，3]．

（手順1）主空間の初期点 $x_1 = G^{-1}a$（無制約最小点）を求める．また双対空間の初期点を $\lambda = 0$ とする．$k=1$とおく．以下では，効いている制約条件に対する双対変数の成分をuで表す．

（手順2）満たされていない制約条件を1つ選び，その番号をpとする．
もしこのようなpが存在しなければ，そのときの実行可能解が最適解となり，終了する．

（手順3）主空間の探索方向 z_k と，双対空間の探索方向 r_k をそれぞれ求める．

（手順4）z_k 方向のステップ幅 t_{2k} と r_k 方向のステップ幅 t_{1k} をそれぞれ求める．

（手順5）$t_k = MIN(t_{1k}, t_{2k})$ として，$t_k = +\infty$ ならば，実行可能解は存在しないので終了する．
そうでなければ $x_{k+1} = x_k + t_k z_k$，$u_k(t) = u_k + t_k r_k$，$u_p(t) = u_p + t_k$ とおく．

（手順6）$t_{1k} \ge t_{2k}$ ならば　$u_p = 0$,　$u_{k+1} = \begin{pmatrix} u_k(t) \\ u_p(t) \end{pmatrix}$ とおき（手順2）へ戻る．そうでなければ，双対変数が0となる制約条件を取りはずし，$u_{k+1} = u_k(t)$，$u_p = u_p(t)$ とおいて（手順3）へ戻る．

3.3 GI法の収束性

GI法を用いて2次計画問題を解くとき，まだ満たされていない制約条件を1つずつ取り入れ，その度にその2次計画部分問題を解く．そして満たされていない制約条件がなくなり，最適解が求まるまでこの反復が行われる．従って，GI法については次のことが言える．

(1) 主空間で目的関数値が必ず上がるので，2次計画部分問題で同じ組合せの制約条件が扱われることはない．

(2) 効いている制約条件の組合せの数は有限である．

以上の(1)，(2)の理由から，有限回の手順で，最適解が得られるかあるいは実行可能解が存在しないことを判定して終了することが保証される．

3.4 パラメトリック狭義凸2次計画問題に対するGI法(改良版)

オリジナルなGI法では，Eが変わるたびに無制約最小点から改めて出発し，各Eに対する問題1の最適解を求める．本稿では，内山，大山[7]が提案した考え方をMarkowitzモデルに適用することを試みる．制約条件の1つにパラメタEが含まれるパラメトリック狭義凸2次計画問題においては，Eの値が変化したときの制約条件は新しい制約条件（即ちp番目の制約条件）が加わるだけと見なすことができるので，前回のEのときに求めた最適解から再出発するGI法で，効率よく最適解を求めることができる．このとき改良GI法は以下のような手順になる．

（手順1）パラメタEの下限E_{begin}，上限E_{end}，刻み幅ESをそれぞれ与え，$E = E_{begin}$とおく．

（手順2）$E > E_{end}$であるならば終了する．そうでないならば出発点に前回の解を与えたGI法で問題1を解く．

（手順3）$E \leftarrow E+ES$として（手順2）へ戻る．

4. 効率的フロンティアの描画

定式化された問題1を解いて，効率的フロンティアを描画するまでのプロセスを述べる．Markowitzモデルは，パラメタEを含む問題となっている．与えられた株価データによってEの上限（$\mu_.$の最大値）と下限（$\mu_.$の最小値）が決定される．それらをE_{max}，E_{min}とおく．まずEを$E = E_{min}$として問題1を

解き，最小分散点を求める．最小分散点に対応する収益率をE_0とする．次にEをE_0から始めて，適当な刻み幅ESで増やしていき，各Eと対応する分散の最小値Vの対（E, V）を$E-V$座標（ただし，横軸をV，縦軸をEとする）上にプロットし，効率的フロンティアの概形を求める．以上の手順は次のようにまとめられる．

(手順1) データを入力する．
(手順2) 各銘柄の期待収益率 μ_i (i=1, ..., n)，各銘柄間の分散共分散行列Cを求める．
(手順3) $E=E_{min}$として問題1で解き最小分散点に対応する収益率Eを求める．
(手順4) EをE_0からE_{max}まで適当な刻み幅で変化させて，改良版GI法により一連の(E, V)値を求めて効率的フロンティアを描画する．

5. 実験

本節では，3.4節と4節で提案した方法を実際のデータに適用した数値実験について報告する．

5.1 使用データ

日経平均株価採用銘柄225種類の中から，l銘柄選ぶ．使用するデータは1985年1月から1989年12月までの60期分（1ヶ月を1期とする）である．ただし，行列Cが正定値であるためには，選ぶ銘柄数lが$l<60$でなければならないので，lは最大59までとする．

5.2 結果

本実験では期待収益率の高い順に銘柄を選び，$l=10, 20, 30, 40, 50, 59$の場合を取り扱った．銘柄数ごとの計算所要時間を表1に示す．ここでT_1はEを変化させたときの総所要時間であり，T_2はE_{min}のときだけの所要時間（即ち初期設定に要する時間）である．図1には$l=59$の場合の効率的フロンティアを示した．このときのパラメタEの値は，$E_{min}=3.40017$，$E_0=4.24121$，$E_{max}=5.96017$であり，$ES=0.1$として$E_0=4.24121$から$E=5.94121$まで動かした．最小分散点は(E_0, V)=(4.24121, 14.15783)であった．実験は日本電算機製のJS5/85(microSPARK2，85MHz）上で行い，プログラム言語としてはFortran77を使用した．表1のT_1とT_2を比較すると，Eを変化させたときのパラメトリック狭義凸2次計画問題が改良GI法で効率良く解けたことがわかる．しかしながらこの一例だけではオリジナル版のGI法より改良GI法の方が効率よく解いていると判断するのは難しい．より多くの銘柄数に対する実験を行って，その結果を検討する必要がある．

表1: 銘柄数と数値計算に要した時間

l	T_1(秒)	T_2(秒)
10	0.18	0.1
20	0.49	0.17
30	1.07	0.37
40	2.05	0.67
50	3.34	1.21
59	5.68	1.94

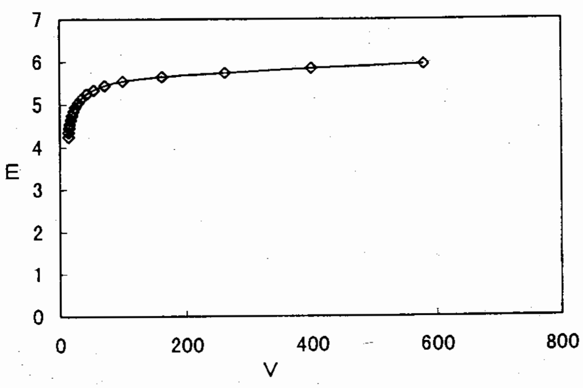

図1: 効率的フロンティア(59銘柄)

6. 満足水準達成確立を最大化する計画法への改良GI法の適用

ポートフォリオ選択問題の定式化としてはMarkowitzモデルの他にもいろいろなモデルがあるが，ここでは満足水準達成確立を最大化する計画法を取り上げる．このモデルでは実際の収益率が予め設定した満足水準以上になる確率を最大化するポートフォリオxを求める．将来の収益率はxの関数$\pi(x)$とし

て表せる．それぞれの株価収益率は確率変数であるから収益率$\pi(x)$も確率変数となる．ここで収益率に対する満足水準をrとすると満足水準達成確率は次式で表せる．

$$Prob\{\pi(x) \geq r\}$$

ただし$Prob\{\cdot\}$は$\{\cdot\}$が満たされる確率を表す．rを与えたときにこの確率を最大にするポートフォリオxを求めたい．

収益の予測誤差が正規分布に従うと仮定すればこの問題は以下のように定式化できる[5].

問題 2 （満足水準達成確立を最大化する問題）

rを正のパラメータとしたとき

制約条件　$x \geq 0 \quad e^T x = 1$の下で

目的関数　$\dfrac{E[\pi(x)] - r}{\sqrt{V[\pi(x)]}} = \dfrac{\mu^T x - r}{\sqrt{x^T C x}}$ をxについて最大化せよ．

この問題2と問題1との間には同値性がある．すなわち，rが与えられたとき，$r = E - (\hat{x}(E)^T C \hat{x}(E))^{\frac{3}{2}}$を満たす$E$に対する$\hat{x}(E)$が問題2の最適解となっている．(ただし，$\hat{x}(E)$は$E$を固定したときの問題1の最適解である)

この同値性を利用すれば問題1を解くことにより問題2を解くことが可能になる．したがって，rを与えたときに$f(E) = E - (\hat{x}(E)^T C \hat{x}(E))^{\frac{3}{2}} - r = 0$を満たす$E$を求めればよいので，次のような手順が考えられる．ただし，$f(E) = 0$の解の一つをE^*とする。

（手順1）rを与える．

（手順2）E_{min}～E_{max}の間をm等分する．

（手順3）m等分したそれぞれの範囲にE^*が含まれるかを調べる．(図2参照)

（手順4）E^*が含まれている区間がなければ終了．あれば（手順5）へ．

（手順5）E^*が含まれている区間が与えられた精度ϵより小さければその区間の中点の値をE^*の近似解として終了し，そうでなければその区間をさらに、m等分して（手順3）へ行く．

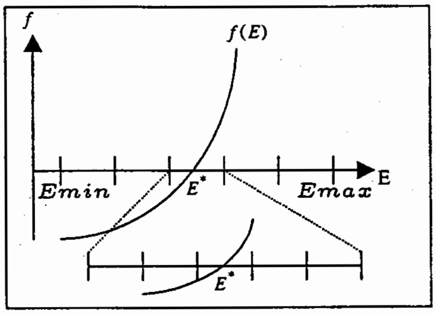

図2：$f(E) = 0$を解く手順

7. まとめ

オリジナル版のGI法より改良GI法の方が効率よいと結論するためには，もっと多くの銘柄数の場合で比較検討する必要がある。

また,本稿では問題1と問題2の同値性を利用して，満足水準達成確立を最大化する問題を解くための手順を提案したが,そのプログラムの作成は今後の課題である。

謝辞

本研究を行なうにあたって東京理科大学理学部応用数学科の矢部博助教授には多大なご指導をいただきました．深く感謝いたします．

参考文献

[1]ASNOP研究会，「パソコン$FORTRAN$版　非線形最適化プログラミング」，日刊工業新聞社，1991.

[2]Goldfarb, D. and Idnani, A, A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs, *Mathmatical Programming*, Vol.27, pp.1-33(1983).

[3]茨木俊秀，福島雅夫，「最適化プログラミング」，岩波書店，1991.

[4]今野浩，「理財工学　I」，日科技連，1995.

[5]南石晃明，「確率的計画法」，現代数学社，1995.

[6]津野義道，「ポートフォリオ選択論入門」，共立出版，1991.

[7]内山明彦，大山哲生，「野菜の作付け計画問題へのGI法の適用」，東京理科大学工学部第一部経営工学科卒業論文，1997.