巡回セールスマン問題に対する対話的緩和法

国井 和彦 （沼田 一道 助教授）

1．はじめに

巡回セールスマン問題（TSP:Traveling Salesman Problem）は，与えられた全ての都市をそれぞれ一度ずつ訪問して最初の都市に戻るとき，移動時間や距離などに基づく移動費用の総和が最小となる巡回路を求める問題である．n 都市を訪問する場合，巡回路は$(n-1)!/2$ 通りあるが，n が増加すると，この数は急速に増大する．その場合，全ての組合せを列挙して最適な巡回路を求めることは，事実上不可能なので，様々な近似解法が提案されている[1]．他方，できるだけ効率的な列挙を目指す分枝限定法や多面体アプローチに基づく分枝カット法などの厳密解法も盛んに研究されている．

本研究では，多面体アプローチに基づく解法である緩和法に注目し，対話的に線形不等式を追加しながら TSP を線形計画問題として解くソフトウェアを作成する．本ソフトウェアにより，

- 線形不等式を追加することによる緩和解の変化
- どのような線形不等式を追加した場合に，目的関数の変化が大きいか

などを観察することができる．様々な TSP 問題を本ソフトウェアで解き，多面体アプローチの求解の過程について理解を深めることは，能率的な厳密解法の設計に役立つと思われる．

2．多面体アプローチに基づく緩和法

n 都市の TSP を完全無向グラフ $G=(V,E)$ 上の問題としてモデル化する．本研究では，都市 i から j へ移動するときの費用と都市 j から i へ移動するときの費用が等しい対称型 TSP 問題を扱う．都市を頂点，都市間の道を枝と呼び，全頂点間には枝があるとする．頂点の集合を V，枝の集合を E で表す．さらに，次の記号を定義する．

枝数 $m: m=n(n-1)/2$

枝変数ベクトル $\boldsymbol{x}: \boldsymbol{x}=(x(1),x(2),\cdots,x(m)),\quad x(e)\in\{0,1\},\quad e=1,2,\cdots,m$

枝費用ベクトル $\boldsymbol{c}: \boldsymbol{c}=(c(1),c(2),\cdots,c(m)),\quad c(e)$は枝$e$の移動費用

グラフGの接続行列 $A:\begin{cases} A(v,e)=1 & \text{（頂点}v\in V\text{に枝}e\in E\text{が接続しているとき）} \\ A(v,e)=0 & \text{（頂点}v\in V\text{に枝}e\in E\text{が接続していないとき）} \end{cases}$

枝集合 $E(W)$: 頂点集合$W\subseteq V$の要素に接続する枝の集合

枝変数の総和 $x(F)$: 枝集合$F\subseteq E$について，$x(F)=\sum_{e\in F}x(e)$ とする

以上の記号を用いて TSP は右のように定式化される．$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ は総移動費用を表し，$A\boldsymbol{x}=2$ は任意の頂点に接続する枝の本数が二本であることを表す．$x(E(W))\leq|W|-1$ は任意の頂点の部分集合 Wについて，Wに含まれる頂点のみで巡回路になることを禁止する制約式である．これらの制約条件を満たす問題(TSP)の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ は全頂点を通る巡回路に対応する．

$$
(\mathrm{TSP})\begin{cases}
\min. & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} & A\boldsymbol{x}=2 \\
 & x(E(W))\leq|W|-1 \quad (W\subset V, W\neq V, W\neq\phi) \\
 & x(e)=\{0,1\} \quad (e\in E)
\end{cases}
$$

問題(TSP)は変数に離散的な条件を含んでおり，また，頂点数の多い問題では，頂点集合 W は膨大な組合せになるので，直接解くことは困難である．

問題(TSP)の実行可能解は R^m 内の離散点で表現され，これらの点の凸包を TSP 多面体（図１のＱ：凸多面体）と呼ぶ．ここで，Ｑを表す不等式としては，Ｑのファセット（TSP 多面体の極大な真の面）を与える不等式（ファセット制約）だけを考えれば十分である．従って，$c^T x$ を目的関数とし，$x \in$ Ｑを制約条件とする線形計画問題を解けば，(TSP)の最適解は得られる．

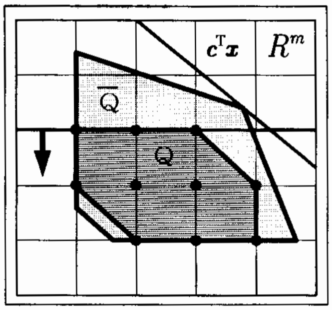

図 1. 凸多面体

しかしながら，TSP 多面体を表すファセット制約はその全てが知られているわけではなく，その数も膨大である．そこで，問題(TSP)の条件 $x(e) \in \{0,1\}$ を $0 \leqq x(e) \leqq 1$ に連続緩和し，制約式の部分集合Ｌを用いた右の緩和問題($\overline{\text{TSP}}$)を考える．緩和問題($\overline{\text{TSP}}$)の実行可能領域はＱを含む凸多面体$\overline{\text{Q}}$である．

$$(\overline{\text{TSP}})\begin{cases} \text{min.} & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = 2 \\ & 0 \leq x(e) \leq 1 \quad (e \in E) \\ & \text{L} \end{cases}$$

そこで，最初Ｌ＝ϕとして，Ｌにファセット制約を追加しながら($\overline{\text{TSP}}$)を線形計画問題として解いていく．このとき，$\overline{\text{Q}}$は切除されてＱに近づく．そして，(TSP)の最適解（Ｑのある端点）が$\overline{\text{Q}}$の端点となるまで$\overline{\text{Q}}$を切除できれば，(TSP)の最適解が($\overline{\text{TSP}}$)の最適解として得られる．

３．TSP多面体のファセット制約

TSP 多面体を表すファセット制約はいくつか知られているが，本研究では，部分巡回路除去制約と２-マッチング制約の二つを用いる．

部分巡回路除去制約は，次の式で表される線形不等式である．

$$x(E(W)) \leq |W| - 1 \quad (W \subset V, W \neq V, W \neq \phi)$$

２-マッチング制約は，ハンドルと呼ばれる任意の頂点集合 $H \subset V$ があり，歯と呼ばれる頂点集合 T_i が H と一点を共通し互いに背反な要素数 2 の頂点集合であり，k を T_i の個数とするとき，次の式で表される線形不等式である．

$$x(E(H)) + \sum_{i=1}^{k} x(E(T_i)) \leq |H| + \frac{k-1}{2}$$

緩和問題($\overline{\text{TSP}}$)の最適解 $\bar{x}$ が巡回路でない場合，これらのファセット制約のうちに $\bar{x}$ が満足しないものがある場合には，$\bar{x}$ を表す図の中にある特徴を持った図形が見られる．

例えば，$\bar{x}$ が満足しない部分巡回路除去制約がある場合には，図２のように，ある頂点集合 Wについて，Wに含まれる頂点のみで巡回路になっているのがわかる．また，$\bar{x}$ が満足しない２-マッチング制約がある

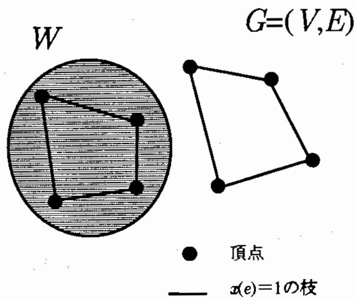

図２．部分巡回路除去制約

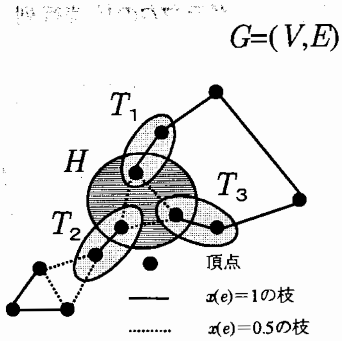

図３．２-マッチング制約

場合の解の一例を図３に示す．このような図形を指定することにより，それに対応するファセット制約を対話的に追加することができる．

４．対話的緩和法のアルゴリズム

対話的緩和法のアルゴリズムを以下に示す．

Step1：（初期化） TSP 多面体を表すファセット制約の集合を仮にＬ＝ϕとしておく．

Step2：（LP 解） 集合Ｌに基づく TSP の緩和問題である線形計画問題($\overline{\text{TSP}}$)を解き，その最適解 $\bar{x}$ を求める．$\bar{x}$ が巡回路であれば TSP の最適解であり，終了する．さもなければ Step3 へ進む．

Step3：（ファセット制約生成） $\bar{x}$ が満足しないようなファセット制約を対話的に見つける．そのような不等式が発見できなければ，TSP の最適解は求められずに終了する．見つかった場合には，それをＬに追加して Step2 へ戻る．

５．作成したソフトウェアの概要

作成したソフトウェアの機能を以下に示す．なお，本ソフトウェアはＣ言語で記述し，図形入出力部分は Motif を用いて作成した．実行計算機は日本電算機の JS5/85 である．

A) ファイル入力：“File” メニューの “Open...” を選ぶと，入力ファイルを選択するファイルセレクションダイアログが開く．入力ファイルには，頂点数，頂点の座標，などが格納されている．ファイル入力後，各枝の費用の計算と頂点の描画を行う．

B) 近似解法：アローボタンを押すと，TSP の近似解法である２-opt 法により実行可能解を求め，近似解の描画を行う．

C) 単体法：アローボタンを押すと，線形計画問題の解法である単体法を用いて，ファセット制約の集合Ｌ（最初はＬ＝ϕ）に基づく緩和問題($\overline{\text{TSP}}$)を解き，解の描画を行う．本単体法は TSP 専用に作成したものであり，以下の特徴を持つ．

- Ｂで求めた近似解（巡回路）の順に掃き出しを行い，初期基底解を得る．
- 変数の上下限制約 $0 \leqq x(e) \leqq 1$ があるため，非基底変数を 0 と 1 の二通りの値を持つようにして，最適性の判断とタブローの更新を行う．この方針により，線形計画問題の制約式を大幅に減らすことができる．
- ファセット制約の追加に対応した動作をする．

D) ファセット制約追加：描画された頂点をマウスでクリックあるいは領域指定することにより，その頂点集合に対応するファセット制約を追加することができる．部分巡回路除去制約と２-マッチング制約の選択や，ハンドルと歯の入力のために，“subtour”，“2_match”，“H”，“Ti” の各ボタンを備えている．

上記 A,B の実行後，全頂点を含む巡回路になるか，追加できるファセット制約がなくなるまで C,D を繰り返す．

E) その他の機能：メッセージ領域に目的関数の値，クリックした頂点の番号，クリックした枝の番号・枝変数 $x(e)$ の値・移動費用・接続する頂点の番号を表示させることができる．

６．実行例と考察

作成したソフトウェアの実行例を図４，図５に示す．問題例は Heidelberg 大学の G.Reinelt によって収集された問題集 TSPLIB95 中の “berlin52” である．図４はＬ＝ϕである緩和問題の解を表示した図である．図５は図４の頂点集合 W に対応する部分巡回路除去制約をＬに追加した緩和問題の

解を表示した図で，追加した制約式を満たすように，解が変化しているのが見られる．この問題はさ

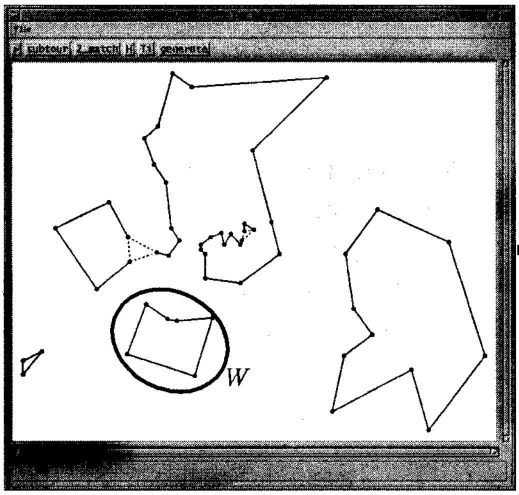

図4．部分巡回路除去制約追加前

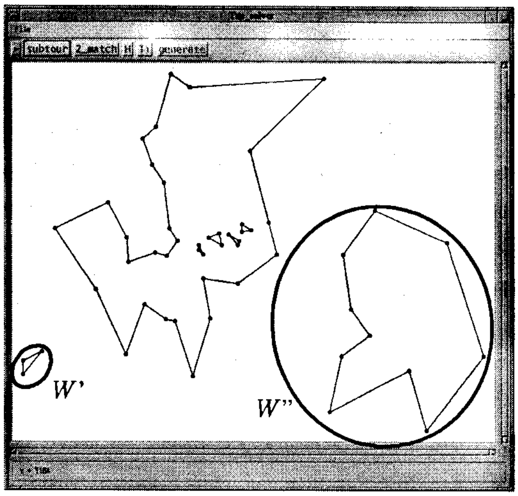

図5．部分巡回路除去制約追加後

らに W' と W'' に対応する部分巡回路除去制約を追加することにより，TSP の最適解を得ることができる．

上の例では，W とそれに近い頂点集合の一部がつながり，それらの頂点からなる巡回路になっている．このような変化はある程度予想されうるが，追加したファセット制約の影響がグラフ上の広い範囲に伝わり，小数枝が多くなるような予想外の変化をする場合があった．また，元の問題の頂点を少し移動させた問題を解いたところ，求解の過程がまったく違うことがあった．このようにして，頂点の分布の仕方による問題の解きやすさについて調べてみたが，見た目だけでは，はっきりとしたことはわからなかった．

この他，TSPLIB95 の “eil51”，“eil76”，“pr107” などの問題は対話的緩和法により，最適解に達した．

7．まとめ

本研究では，対話的緩和法により TSP を線形計画問題として解くソフトウェアを作成した．本ソフトウェアでは，解を求める過程において，追加したファセット制約が緩和解やその目的関数にどのように影響を与えるか，視覚的に調べることができる．また，専用の単体法により，$n=100$ 程度の緩和問題を高速に解くことができる．しかし，これだけでは役に立つ情報を得ることは難しいので，頂点の分布を統計的に調べるなどして，ファセット制約の与える影響について考えることが必要である．

また，本ソフトウェアでは，扱えるファセット制約の種類，単体法で緩和解を解く速さや，ファセット制約に対応する頂点集合を入力する際のインタフェースが十分とはいえないので，今後，このような点についての改良が必要である．また，必ず最適解に至るためには，“分枝” の考えが必要であることを確認した．

【参考文献】

[1]山本芳嗣,久保幹雄：“巡回セールスマン問題への招待”，シリーズ現代人の数理，朝倉書店，(1997)．
[2]茨木俊秀，福島雅夫：“最適化の手法”，情報数学講座第 14 巻，共立出版，(1993)，pp. 71-103.