売却時点を考慮したポートフォリオ選択問題

繁田 洋一（沼田 一道助教授）

1 はじめに

投資家は市場に存在する資産に投資することによってなるべく大きな収益を得ようとする。ところが資産価格は刻々と変動しているため、将来もたらされる収益を投資時点で知ることは不可能である。H.Markowitz はこのような不確実な投資という行動を数理計画問題として定式化した。この H.Markowitz の MV-model（平均・分散モデル）によって投資家は求めている収益率を得るための最も合理的な資産の組み合わせ（ポートフォリオ）を得ることができるようになった。このようにある基準の下で望ましい投資資産の組み合わせを求める問題はポートフォリオ選択問題と呼ばれている。近年、ポートフォリオ選択問題に関して様々な研究が行われてきている。ところが、これらの研究の主な着眼点はいかにポートフォリオを構成するかということにあり、そのポートフォリオをいつ売却すれば良いのかという点については言及していない。つまり、「ポートフォリオは期首に購入し期末には売却する。」という仮定の下で研究が進められていた。本研究の目的は MV-model を用いて売却時期についての考察を深め、いかに MV-model を運用していけば良いかを提案することである。具体的には、あるポートフォリオを複数期間保有するとしたとき、

1. ポートフォリオ選択の基準
2. 売却時期を判断するための指標

を提案し、数値実験によりその有意性を検討する。

2 MV-model

2.1 基本用語

n 種の資産 $S_j(j=1,\cdots,n)$ が取引されている市場において S_j の期首における一単位あたりの価格を P_j、期末における価格を $\tilde{P}_j$、期間中に支払われる配当金を d_j とする。この時、投資家が S_j を y_j 単位購入したとすると、この投資による総収益は $\sum_{j=1}^{n}(\tilde{P}_j-P_j+d_j)y_j$ となる。通常、投資のパフォーマンスを測る尺度としては総収益を総投資額で割った収益率を用いる。

$$\text{収益率}=\sum_{j=1}^{n}(\tilde{P}_j-P_j+d_j)y_j/\sum_{j=1}^{n}P_jy_j$$

ここで資産 S_j の収益率 R_j とそれに対する投資比率 x_j

$$R_j=\frac{(\tilde{P}_j-P_j+d_j)}{P_j},\qquad x_j=P_jy_j/\sum_{j=1}^{n}P_jy_j$$

を与えると投資全体の収益率 $R(\boldsymbol{x})$ は $R(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{n}R_jx_j$ と書くことができる。この時生成されるベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ を投資家が所有するポートフォリオという。

2.2 数理計画問題としての定式化

H.Markowitz は、収益率ベクトル $(R_1,\cdots,R_n)$ をある確率分布に従う確率変数であると考え、投資家は次の基準

基準 1.1 収益率の期待値が一定ならば、その分散は小さいほど望ましい。
基準 1.2 収益率の分散が一定ならば、その期待値は大きいほど望ましい。

に従って行動すると想定した。そして、投資のリスクを収益率のバラツキ具合、つまり分散で表現した。その上で、収益率の期待値 $E[R(\boldsymbol{x})]$ をある一定値 ρ に固定し、その分散 $V[R(\boldsymbol{x})]$ を最小化する問題として、以下の数理計画問題を提案した。

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & V[R(\boldsymbol{x})] \\ \text{条件} & E[R(\boldsymbol{x})]=\rho \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \qquad x_j \geq 0, \qquad j=1,\cdots,n \end{array}\right.$$

この問題を解くことにより、投資家が求める収益率を確保した上でリスクを最小にするポートフォリオを得ることができる。このモデルは MV-model(平均・分散モデル) と呼ばれている。

3 提案するポートフォリオの求め方

3.1 基本概念

投資家はある一定期間（通常1期は1ヶ月又は1ヶ年）ポートフォリオを保有し、その期間における資産価格の変動により損益を得る。ところで、投資家が1期のみポートフォリオを保有するのではなく先複数期に渡ってポートフォリオを保有することができると考えた時、より合理的なポートフォリオの求め方があるのではないだろうか。つまり1期先のリスクのみを考えるのではなく、先複数期間におけるリスクを考慮したポートフォリオの組み方が必要となるのではないか。そこで、1期〜 H 期先まで、投資家がポートフォリオを保有する可能性があると考えたときの MV-model の活用方法を以下で提案する。

資産 S_j の h 期後の収益率を $R_j^{(h)}$ と表す。すると、ポートフォリオ $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ の収益率 $R^{(h)}(\boldsymbol{x})$ は $R^{(h)}(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{n} R_j^{(h)} x_j$ と表現できる。ここで収益率ベクトル $(R_1^{(h)},\cdots,R_n^{(h)})$ がある確率分布に従う確率変数であると考え、1期〜 H 期末における収益率の期待値 $E[R^{(h)}(\boldsymbol{x})]$, $(h=1,\cdots,H)$ を投資家が求める収益率 ρ 以上という条件のもとで、各期末における分散 $V[R^{(h)}(\boldsymbol{x})]$, $(h=1,\cdots,H)$ の和を最小化する以下の数理計画問題を考える。

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & \sum_{h=1}^{H} V[R^{(h)}(\boldsymbol{x})] \\ \text{条件} & E[R^{(h)}(\boldsymbol{x})] \geq \rho, \quad h=1,\cdots,H \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \qquad x_j \geq 0, \qquad j=1,\cdots,n \end{array}\right.$$

この問題を解くことにより、複数期先のリスクも考慮したポートフォリオを得ることができる。上述した問題を解くにあたって $E[R^{(h)}(\boldsymbol{x})], V[R^{(h)}(\boldsymbol{x})]$ を x の関数として表す必要がある。これは以下のように行う。

収益率ベクトル $(R_1^{(h)},\cdots,R_n^{(h)})$ が $(r_{1t}^{(h)},\cdots,r_{nt}^{(h)}),(t=1,\cdots,T)$ を実現値集合とする離散分布に従うものとし、その出現確率 $f_t^{(h)}=Pr\{(R_1^{(h)},\cdots,R_n^{(h)})=(r_{1t}^{(h)},\cdots,r_{nt}^{(h)})\},(h=1,\cdots,H)$ が与えられていると考えると、

$$E[R^{(h)}(\boldsymbol{x})]=\sum_{j=1}^{n}\Big\{\sum_{t=1}^{T}f_t^{(h)}r_{jt}^{(h)}\Big\}x_j,\quad V[R^{(h)}(\boldsymbol{x})]=\sum_{t=1}^{T}f_t^{(h)}\Big\{\sum_{j=1}^{n}(r_{jt}^{(h)}-E[R_j^{(h)}])x_j\Big\}^2,(h=1,\cdots,H)$$

と表現することができる。実際に $f_t^{(h)}$ や $(r_{1t}^{(h)},\cdots,r_{nt}^{(h)}),(h=1,\cdots,H)$ を求める際には過去のデータ（ヒストリカルデータ）を用いる。つまり、$(R_1^{(h)},\cdots,R_n^{(h)})$ の実現値として過去の T 期間の収益率ベクトル $(r_{1t}^{(h)},\cdots,r_{nt}^{(h)}),(t=1,\cdots,T)$ を用い、$f_t^{(h)}=1/T$ とする。$r_{jt}^{(h)}$ については例えば $h=2$ の時は下図のように求める。

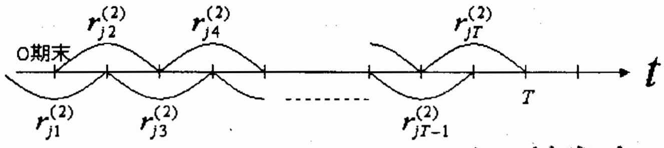

図 1：収益率の実現値の求め方

3.2 数値例

過去 50 期 (1992 年 2 月～1996 年 3 月) におけるデータをもとに日経 225 のうち 3 期連続で収益率の期待値がマイナスとなる銘柄や合併のためにデータが途絶えてしまった 26 銘柄を除いた 199 銘柄について、提案した方法で実際にポートフォリオを求める。この際、1 期後、2 期後、3 期後までのリスクを考慮に入れた。つまり $H=3(T=48)$ とした。また、投資家が要求する収益率は $\rho=0.8,1.0,1.5,2.0$ の 4 つとした。これらの結果の中からここでは $\rho=1.5$ についての結果を以下の表にまとめる。計算には Microsoft Excel の solver を用いた。

表 1：数値例の結果

	1 期末	2 期末	3 期末
収益率の期待値	1.5	2.77745	3.98077
分散	24.6723	51.0745	63.4301

上表によると、ポートフォリオをなるべく長期間保有した方が高収益を得る可能性は高くなるが、分散すなわちリスクも大きくなることがわかる。

4 ポートフォリオの売却時期について

3.2 の数値例について考える。求めたポートフォリオついて、事後データ (1996 年 4 月～1996 年 6 月) から実際の収益率を計算したものを以下に示す。

表 2：実際の収益率

	1996 年 4 月 (1 期末)	1996 年 5 月 (2 期末)	1996 年 6 月 (3 期末)
収益率	1.85541	1.557983	5.418863

このケースでは投資家は収益率1.5を求めているので、1期末の結果で収益率1.85541が達成された時点でポートフォリオを売却すれば良い。ところで考察を深めるために、仮に1期末において収益率が1.5未満であった場合を考えてみる。その場合、投資家は

1. 収益率は上昇すると考えてポートフォリオを2期末まで保有し続ける
2. 期末では更に収益率が下がると考えて1期末で売却する

の2つの判断のうちどちらかを選択する。この時、投資家の判断を助ける指標を与えられないであろうか。これについて以下で考察する。

仮に今1期末の実際の収益率が1.3であったとする。ここで、収益率 $R^{(h)}(\boldsymbol{x})$ が正規分布に従うと仮定したとき、表1の期待値と分散を用いて2期末に収益率が1.3以上になる確率を計算すると $Pr[R^{(2)}(\boldsymbol{x}) > 1.3] = 0.5793$ となる。つまり2期末におけるポートフォリオの収益率は約58%の確率で1期末よりも上昇すると考えられる。この情報は投資家の判断の助けになると思われる。これと同様にして2期末でも収益率が1.5以上にならなければ3期末における収益率の変動を確率的に判断して行動すれば良い。

5 提案方法の有意性の検討

提案方法の有意性を示すために以下に通常のMV-modelによって3期先のリスクのみを考慮した問題の結果を示す。

表3：通常の方法による結果

	1期末	2期末	3期末
収益率の期待値	-	-	1.5
分散	-	-	34.7233

上表の結果からは1期末、もしくは2期末において収益率が1.5未満であった場合、投資家の行動の指標となるデータを導くことができない。つまり提案方法の最大の意義は複数期間ポートフォリオを保有することができるとしたときに、ある時点において売却するべきか否かを決定するための指標を与えられるという点にある。

6 おわりに

本研究では、複数期間にわたってポートフォリオを保有するときのMV-modelの活用方法を提案し、投資家がポートフォリオを売却するか否かの判断をする際の補助となる指標を与えることができた。しかし、指標はあくまでも指標であり、最終的な決定は投資家の勘ともいうべき判断に委ねられる。この点についてはまだ研究の余地がある。つまり、各期末においてその時点で投資家はポートフォリオを売却すべきなのか、それとも保有し続けるべきなのかを確率モデルで表現し、合理的な決定を下すという作業が今後の課題として挙げられる。

参考文献

[1] 今野 浩:「理財工学I」, 日科技連 ,1995.
[2] 福島 雅夫:「数理計画入門」, 朝倉書店 ,1996.
[3] 島谷 明男:「Excel97 操作ハンドブック」, ナツメ社 ,1998.