ＤＥＡモデルにおける改善目標案について

―入力の増加、出力の減少を考慮する場合―

柴田　昌彦　　本沢　卓司　（沼田　一道　助教授）

１．はじめに

企業の活動は、複数種類の入力を投入し、そこから複数種類の出力を産出する多入力多出力の変換過程とみなすことができる。ある企業が他の企業に比べてこの変換過程をどれだけ効率よく行っているかを評価する手法に、ＤＥＡ（Data Envelopment Analysis）がある。ＤＥＡではまた、効率が悪いものには、効率を良くするための改善目標案を示すことができる。今までに提案されている改善目標案は、入力に対しては削減の方向、出力に対しては拡大の方向に求めている。しかし、経営者が大規模の事業縮小を行うと意思決定した場合、入力（投入）を減らすだけでなく、出力（産出）も多少減らさざるを得ない。逆に、大規模の事業拡大を行うと意思決定した場合、出力（産出）を増やすだけでなく、入力（投入）も増やさなければならない。

本研究では、出力の減少、入力の増加を認めた改善目標案の求め方を提案する。その際に、効率的フロンティアの分割面を求める必要があるが、独立した専用ソフトを使用すると一連の作業が繁雑になってしまう。そこで、ＤＥＡの処理の延長上で効率的フロンティアの分割面を求める方法を提案し、データ入力から改善目標案の提示までを一貫して行うことのできるプログラムを作成する。

２．ＤＥＡの概要

分析の対象となる活動体をＤＭＵと呼ぶ。各ＤＭＵは、複数個の同種の入力と、複数個の同種の出力を持ち、入力値、出力値とも正とする。また、各ＤＭＵの活動に対して責任を持つ意思決定者は、ある程度の独立した経営上の権限を持っているものとする。

以下の議論で用いる記号を次のように定義する。

ｎ：ＤＭＵの総数　　　ｍ：入力項目の総数

ｏ：分析対象のＤＭＵ　　ｋ：出力項目の総数

X_{ij}：ＤＭＵj の ｉ番目の入力値　　　ＤＭＵjの入力ベクトル $x_j = (X_{1j},\cdots\cdots\cdots,X_{mj})^T$

Y_{rj}：ＤＭＵj の ｒ番目の出力値　　　ＤＭＵjの出力ベクトル $y_j = (Y_{1j},\cdots\cdots\cdots,Y_{kj})^T$

ＤＥＡでは、ＤＭＵの活動の取りうる範囲を想定し、その中で各ＤＭＵの活動の効率性を相対的に評価する。ＤＭＵの活動の取りうる範囲を生産可能領域と呼ぶ。生産可能領域の与え方によって様々なＤＥＡモデルが提案されているが、例えばＢＣＣモデルと呼ばれているものの生産可能領域 F_{BCC} は次のように与えられる。

$$F_{BCC} = \{(x,y) \mid x \ge \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \quad y \le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \qquad (1)$$
$$\lambda_j \ge 0, \qquad x, y \ge 0 \qquad (j = 1,\cdots,n)\}$$

現存するＤＭＵの凸結合を考え、凸結合以上の入力ベクトル及び凸結合以下の出力ベクトルをとる活動が可能であるとしている。

生産可能領域の中で、入力値を維持したまま、これ以上出力値を増加させることができず、かつ、出力値を維持したまま入力値を減少させることができないようなＤＭＵは、限界的な活動をしていると考え、効率が良いと評価する。このような活動の集合を効率的フロンティアと呼ぶ。ＤＥＡでは、効率的フロンティア上にある活動をＤ効率的と呼び、また、効率的フロンティア上にない活動をＤ非効率的と呼ぶ。Ｄ非効率的であるＤＭＵの改善目標案は効率的フロンティア上に存在する。

3．加法モデル

加法モデルは分析対象が効率的か非効率的かという効率の判定をするために提案されたモデルである。加法モデルでは、ＢＣＣモデルと同じ生産可能領域を採用している。効率的フロンティアまでの入力及び出力の偏差（ S_{io}, S_{ro} ）の和を目的関数とし、その偏差の和を最大化することで効率の判定及び改善目標を得ている。なお、ＢＣＣモデルのように一律削減率をＤ効率値とするようなことはしていないので、効率値は求まらない。また目的関数で入力と出力の両方を取り入れており、入出力を同時に考慮した改善目標案を提示できる点が、入力の削減、あるいは出力の拡大のみを考慮したＢＣＣモデルとは異なる。加法モデルは、以下の式で示せる。

[P1]　(o=1,2,⋯,n)

$$Max \quad \sum_{i=1}^{m} S_{io} + \sum_{r=1}^{k} S_{ro} \qquad (2)$$

$$S.t. \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_{ij} = X_{io} - S_{io} \qquad (i = 1,2,\cdots,m) \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_{rj} = Y_{ro} + S_{ro} \qquad (r = 1,2,\cdots,k) \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \qquad (j = 1,2,\cdots,n) \qquad (5)$$

$$\lambda_j \geq 0, \qquad S_{io} \geq 0, \qquad S_{ro} \geq 0 \qquad (6)$$

[P1]の最適解を S_{io}^*, S_{ro}^* とするときＤＭＵ$_o$＝(X_{io}, Y_{ro})の改善目標案$(\overline{X_{io}}, \overline{Y_{ro}})$は、以下のようになる。

$$\begin{cases} \overline{X_{io}} = X_{io} - S_{io}^* \\ \overline{Y_{ro}} = Y_{ro} + S_{ro}^* \end{cases} \qquad (7)$$

加法モデルは入出力を同時に考慮した改善目標案を提示できる長所がある反面、目的関数を最大化して解いているため変化量が大きくなるという問題点がある。効率的フロンティアを面に分割して、分割した面に改善目標案が存在すると仮定して目的関数を最小化したモデルが参考文献[2]によって提案されている。[2]では、効率的フロンティアの分割面を求める際に cdd と言う独立したソフトウェアを用いている。本研究ではＤＥＡの処理の延長上で分割面を求めることを考える。

4. 効率的フロンティアの分割面

４．１　効率的フロンティアの分割面について

効率的フロンティアの分割面とは、図１のように効率的フロンティアを構成する多面体のことである。（入力項目数＋出力項目数）をｎとすると、生産可能領域 F_{BCC} はｎ次元の凸多面体であり、効率的フロンティアの分割面は F_{BCC} のファセットである。

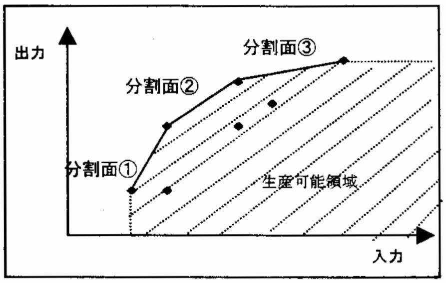

図１．効率的フロンティアの分割面

4．２　効率的フロンティアの分割面の求め方

まず、効率的フロンティアの頂点を求める。この頂点は、ＤＥＡを実行したとき、効率的なＤＭＵとなったものである。頂点 u と頂点 v が同一の分割面に含まれるか否かは u と v の中点が効率的であるか否かで判定することができる。この判定を全ての頂点の組み合わせについて行う。効率的なＤＭＵそれぞれを頂点とし、同一の分割面に存在する頂点どうしを枝で結んだグラフ G を考え、このグラフについてクリーク（極大な完全部分グラフ）を求める。このクリークが、効率的フロンティアの一つの分割面を与える。

	A	B	C	D	E
A		1	1	0	0
B			1	1	0
C				1	1
D					1
E					

0 : 2 点の頂点が効率的フロンティア上にない
1 : 2 点の頂点が効率的フロンティア上にある

図 2.1　隣接行列

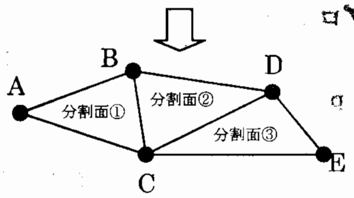

図 2.2　分割面の構成図

5．規模縮小型、規模拡大型の改善目標案について

経営者が、事業縮小、あるいは拡大する必要があると意思決定し、そのために出力を減少すること、入力を増加することを認めていることを前提とする。規模縮小型とは、出力を減少させてでも、より多く入力を削減する目標案(下記[P2])のことである。逆に、規模拡大型とは、多くの出力を得るために、入力を増加させる目標案(下記[P3])のことである。効率的フロンティアの分割面までの入力及び出力の偏差(S)に重み(w)をかけた和を目的関数とし最小化する。このことを全ての分割面に対して行う。偏差は方向が決められているので(規模縮小型は、入出力項目とも減少させる方向、規模拡大型は増加させる方向)、全ての分割面に対して解(改善目標案)が得られるわけではないが、解は幾通りか存在する可能性が高い。偏差に対する重みとして、入出力項目の最大値の逆数を用いた。生産可能領域はＢＣＣモデルを採用する。

重みは $w_i=\dfrac{1}{X_i}\quad w_r=\dfrac{1}{Y_r}$ ただし $X_i=\max\{X_{ij}:j=1,\cdots,n\}\quad Y_r=\max\{Y_{rj}:j=1,\cdots,n\}$ (8)

[P2]　規模縮小型 (o = D 非効率的な DMU)

$$Min\ \sum_{i=1}^{m} w_i S_{iop}^{-}+\sum_{r=1}^{k} w_r S_{rop}^{-} \quad (9)$$

$$S.t.\ X_{io}=\sum_{j\in Hp}\lambda_j X_{ij}+S_{iop}^{-}\quad (i=1,\cdots,m)\quad (10)$$

$$Y_{ro}=\sum_{j\in Hp}\lambda_j Y_{rj}+S_{rop}^{-}\quad (r=1,\cdots,k)\quad (11)$$

$$\sum_{j\in Hp}\lambda_j=1\quad (j=1,\cdots,n)\quad (12)$$

$$S_{iop}^{-},S_{rop}^{-}\geq 0\quad (13)$$

[P3]　規模拡大型 (分割面 p=1,…,L)

$$Min\ \sum_{i=1}^{m} w_i S_{iop}^{+}+\sum_{r=1}^{k} w_r S_{rop}^{+} \quad (9')$$

$$S.t.\ X_{io}=\sum_{j\in Hp}\lambda_j X_{ij}-S_{iop}^{+}\quad (i=1,\cdots,m)\quad (10')$$

$$Y_{ro}=\sum_{j\in Hp}\lambda_j Y_{rj}-S_{rop}^{+}\quad (r=1,\cdots,k)\quad (11')$$

$$\sum_{j\in Hp}\lambda_j=1\quad (j=1,\cdots,n)\quad (12')$$

$$S_{iop}^{+},S_{rop}^{+}\geq 0\quad (13')$$

H_p : 効率的フロンティアの第 P 分割面を構成する DMU の集合

第 P 分割面に対する改善目標案($\overline{X}_{iop},\overline{Y}_{rop}$)は以下のようになる。

$$\begin{cases}\overline{X}_{iop}=X_{io}-S_{iop}^{-*}\\ \overline{Y}_{rop}=Y_{ro}-S_{rop}^{-*}\end{cases}\quad (14)\qquad\qquad \begin{cases}\overline{X}_{iop}=X_{io}+S_{iop}^{+*}\\ \overline{Y}_{rop}=Y_{ro}+S_{rop}^{+*}\end{cases}\quad (14')$$

規模縮小型のときは出力項目の偏差は出力を減少させる方向にのみ動けるようにする。多出力のときは、全部の項目に対して出力がそのままか、減少する改善目標を示すことになる。このことは、入力をより多く削減させることに比重を置くことを意味する。

規模拡大型のときは入力項目の偏差は入力を増加させる方向にのみ動けるようにする。このことは、出力をより多く拡大させることに比重を置くことを意味する。

6．プログラムの手順

(以下をＣ言語で記述しWS(JS/5)上で実行させた。)

ｓｔｅｐ１　加法モデルを解くことにより、全てのＤＭＵに対してＤ効率性の判定を行う。

ｓｔｅｐ２　Ｄ効率的なＤＭＵをもとに、効率的フロンティアの分割面を求める。

ｓｔｅｐ３　[P2]または[P3]を解くことにより、Ｄ非効率的なＤＭＵの改善目標案を得る。

7. 数値例

表 1.1 の例で、提案した改善目標案を求めてみる。D 効率的な DMU は(A,B,C,D,E)であり、D 非効率的な DMU は(F,G)である。効率的なフロンティアの分割面は図 3 のようになる。例えば、DMU(F)の規模縮小型、DMU(G)の規模拡大型の改善目標案は表 1.2 のようになる。DMU(F)では、3 通りの改善目標案が得られるが大規模の縮小案として入力 1 を 54、入力 2 を 5.4 削減し、出力の減少を 32 にとどまらせる案が考えられる。DMU(G)では、入力を増やす目標案として入力 1 を 6 増加し、出力を 8.2 拡大する改善目標案が得られる。

表 1.1　数値例

DMU	入力 1	入力 2	出力
A	18	2.0	12
B	20	2.1	14
C	30	2.2	18
D	80	7.8	63
E	90	8.0	67
F	84	7.6	50
G	32	3.1	18

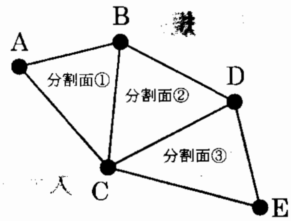

図 3　分割面の構成図

表 1.2　改善目標案（入出力値の変化量）

	DMU(F)			DMU(G)		
	入力 1	入力 2	出力	入力 1	入力 2	出力
分割面 (A,B,C)	-54	-5.4	-32	解なし		
分割面 (B,C,D)	-18	-1.4	0	0	0	5.1
分割面 (C,D,E)	-14	-1.6	0	6	0	8.2

8．おわりに

本研究では、Ｄ非効率的なＤＭＵに対して、入力を多く削減する目標案、または入力を増加させ出力を多く拡大する目標案について考えた。大規模の縮小、あるいは拡大をしたいときの目標案として利用価値がある。また、データを入力すれば改善目標案を示すことができる便利なソフトを作成した。しかし、いくつかの改善目標案が示された場合どの案が一番良いのか、入出力の変動は妥当かどうか、入出力の相関等については、問題ごとに個別に検討する必要がある。これらについての考察は今後の課題である。

[参考文献]

[1]刀根　薫：「経営効率性の測定と改善」,日科技連（1993）

[2]細川　和男,羽部　武一：「DEA における偏差最小の改善案の導出法」,1995 年度東京理科大学工学部経営工学科卒業研究論文（1996）

[3]今野　浩：「線形計画法」,日科技連（1987）

[4]大下　眞次郎,六浦　光一,田中　清：「Ｃプログラミング例題演習」,学献社 (1996)