売却時点を考慮したポートフォリオ選択問題

4495081　繁田　洋一　（沼田 一道 助教授）

発表構成

1 : はじめに

投資家が資産に投資する際

一つの資産に集中して投資するのではなく，
投資の対象を適度に分散させることが必要.

ポートフォリオ選択問題

投資家が要求する*収益率*の下で，*リスク*を最小に
するような資産の組合せと*投資比率*を求める問題

代表例

H.Markowitzによる
MV-model（平均・分散モデル）

従来の研究の着眼点

どのようにポートフォリオを組むかという点に重点がおかれていた。例えば「どのように投資のリスクを表現するか」、「どのように資産の収益率を表現するか」等の論点について研究が進められていた。

「*購入したポートフォリオをいつ売却すれば良いか*」という論点については研究されてきていない。

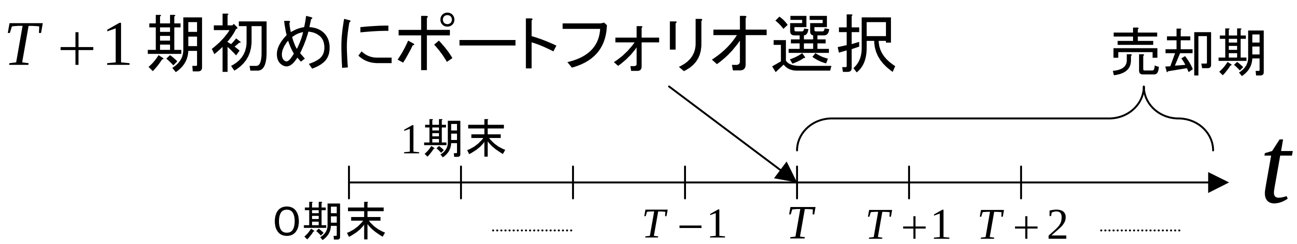
そこで

本研究の着眼点

「*購入したポートフォリオをいつ売却すれば良いか*」という論点について研究する。

研究目的

複数期間保有することを考えた時の
　１: MV-modelの活用法の提案をし、
　２: 売却時期を判断するための指標をしめす。



従来の方法

$T+1$ 期末にポートフォリオを売却

$T+1$ 期末のリスクを考慮に入れる。

提案する活用法

$T+1$ 期***以降の期末***にポートフォリオを売

$T+1$ 期末以降のリスクも考慮に入れる。

２:MV-model

ポートフォリオ選択問題について

ポートフォリオ選択問題

投資家が要求する*収益率*の下で，*リスク*を最小にするような資産の組合せと*投資比率*を求める問題

*リスク*とは？

収益率の期待値のばらつき具合＝分散
（H.MarkowitzのMV-modelの場合）

収益率とは？

ある期間における資産の価格変化と配当金により得られる収益の割合

記号

P_j ：資産 j の期初めにおける1単位あたりの価格

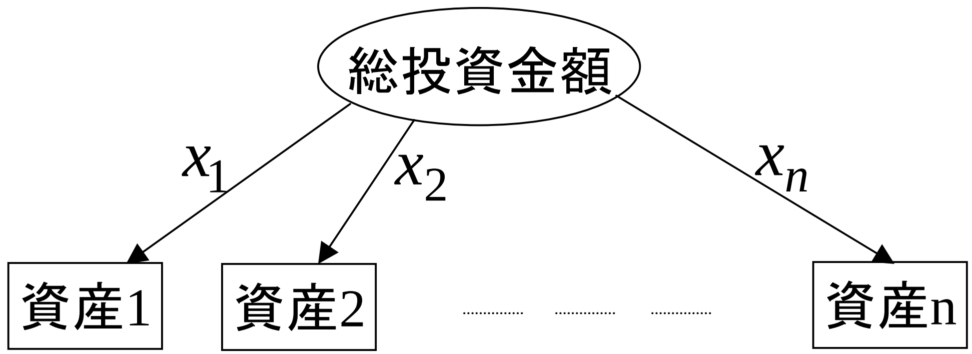
$\tilde{P}_j$ ：資産 j の期末における1単位あたりの価格

d_j ：資産 j の期間中に支払われる1単位あたりの配当金

$$\text{資産 } j \text{ の収益率} = \frac{(\tilde{P}_j - P_j + d_j)}{P_j}$$

*投資比率*とは？

総投資金額に対して資産 j へどれだけ投資するかを表す比率 $(x_1, \ldots, x_n)$



このとき生成されるベクトル

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

を投資家が保有する<u>*ポートフォリオ*</u>と呼ぶ。

ポートフォリオの収益率

ポートフォリオ $\mathbf{x}$ から得られる収益率を $R(\mathbf{x})$ とすると

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j$$

ここで R_j は資産 j の収益率で、確率変数である。

MV-modelの定式化

投資家は以下の規準に従うものと想定する。

Markowitzの規準

規準１　収益率の期待値が一定ならば，
　　　　その分散は小さいほど望ましい

規準２　収益率の分散が一定ならば，
　　　　その期待値は大きいほど望ましい

投資家が要求する収益率を ρ とすると

MV-model

$< P1 >$

最小化　$V\left[R(\mathbf{x})\right]$

条件　$E\left[R(\mathbf{x})\right] = \rho$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

MV-modelのコンパクト分解（１）

MV-model
を実際に解く際

収益率ベクトル $(R_1, \ldots, R_n)$ が$(r_{1t}, \ldots, r_{nt})$,
$(t = 1, \ldots, T)$ を実現値集合とする離散分布に
従うものとする。

記号

r_{jt} ： 資産 j の t番目の実現値

r_j ： 資産 j の収益率の期待値

f_t ： r_{jt}の出現確率

$$V[R(\mathbf{x})] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j = \sum_{t=1}^{T} f_t \left\{ \sum_{j=1}^{n} (r_{jt} - r_j) x_j \right\}^2$$

$$E[R(\mathbf{x})] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} f_t r_{jt} x_j = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j$$

MV-modelのコンパクト分解（２）

$< P1 >$

最小化 $V\left[R(\mathbf{x})\right]$

条件 $E\left[R(\mathbf{x})\right] = \rho$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

$< P2 >$

最小化 $\sum_{t=1}^{T} f_t z_t^2$

条件 $z_t - \sum_{j=1}^{n} (r_{jt} - r_j) x_j = 0, \quad t = 1, \ldots, T$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j = \rho$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

MV-modelのコンパクト分解（３）

$< P2 >$を実際に解く場合、f_tと$(r_{1t}, \cdots, r_{nt})$を求める必要がある。

代表的な方法として過去のデータ（ヒストリカルデータ）を用いる方法がある。

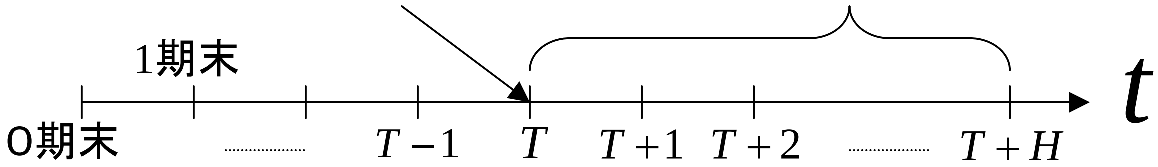
すなわち

過去の T 期間の $(R_1, \cdots, R_n)$の実現値を
$(r_{1t}, \cdots, r_{nt}), \ (t = 1, \cdots, T)$ とし、

$f_t = 1/T$ とする方法が一般的である。

3:提案するポートフォリオの求め方

$T+1$期初めで、あるポートフォリオを購入　　　各期末のどこで売却してもよい



前提

1:売却時にはポートフォリオ全体を売却する。

2:$T+1$から最大 $T+H$ 期末まで保有可。($T > H$)

従来の方法

$T+1$ 期末にポートフォリオを売却

$T+1$ 期末のリスクを考慮に入れる。

提案する活用法

$T+1$期***<u>以降の期末</u>***にポートフォリオを売却

$T+1$期末以降のリスクも考慮に入れる。

提案する活用方法

提案方法の定式化

$R^{(h)}(\mathbf{x})$：h 期末におけるポートフォリオ $\mathbf{x}$ の収益率

$\langle P3 \rangle$

最小化 $$\sum_{h=1}^{H} V\left[R^{(h)}(\mathbf{x})\right]$$

条件 $$E\left[R^{(h)}(\mathbf{x})\right] \geq \rho, \quad h = 1, \ldots, H$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

この問題を解くことによって複数期先のリスクも考慮に入れたポートフォリオが得られる。

提案方法の解法(コンパクト分解)1

記号

$r_{jt}^{(h)}$: 資産 j の t番目の実現値

$r_j^{(h)}$: 資産 j の期待収益率

$f_{jt}^{(h)}$: $r_{jt}^{(h)}$の出現確率

$< P4 >$

最小化 $$\sum_{t=1}^{T} f_t^{(h)} \cdot z_t^{(h)2}$$

条件 $$z_t^{(h)} - \sum_{j=1}^{n} (r_{jt}^{(h)} - r_j^{(h)}) x_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j^{(h)} x_j \geq \rho, \quad h = 1, \ldots, H$$

$$t = 1, \ldots, T$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

提案方法の解法（コンパクト分解）２

$\langle P4 \rangle$を実際に解く場合、

$f_t^{(h)}$,

$(r_{1t}^{(h)},\cdots,r_{nt}^{(h)}),\ (h=1,\cdots,H)$

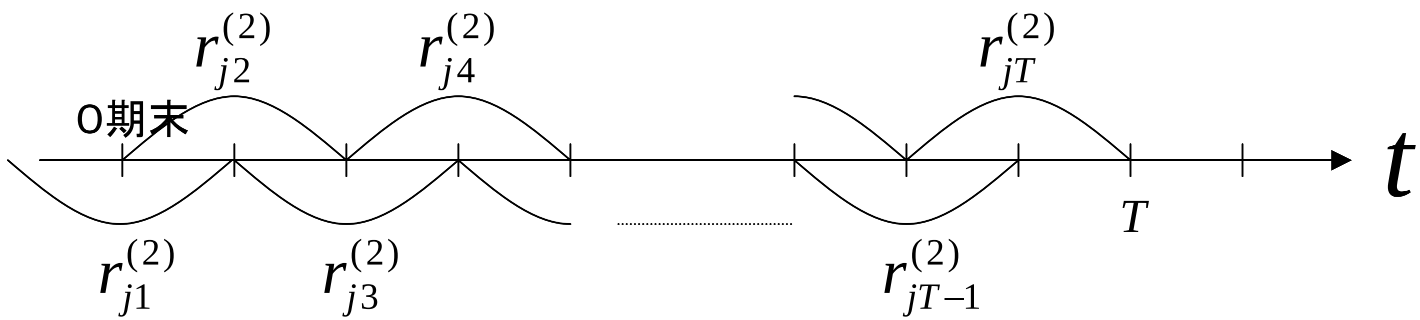
を求める必要がある。

ヒストリカルデータを用いる。
すなわち
過去のT 期間の$(R_1^{(h)},\cdots,R_n^{(h)})$
の実現値を $(r_{1t}^{(h)},\cdots,r_{nt}^{(h)})$
とし、

$f_t^{(h)} = 1/T,\quad (h=1,\cdots,H)$

とする。

$(r_{1t}^{(h)},\cdots,r_{nt}^{(h)})$ については例えば $h=2$の時は下図のように求める。



数値実験

実験方法

投資家の求める収益率は0.8,1.0,1.5,2.0の４つで行う。

３期先までのリスクを考慮にいれる。 ⇒ $H = 3$として実験

データ

日経225のうちsolverの限界を考慮して199銘柄について

・１９９２年２月から１９９６年３月までの５０期→ポートフォリオ作成

・１９９６年４月から１９９６年６月までの３期→実際の収益率を算出

提案した方法と通常のMV-modelの活用法のそれぞれでポートフォリオを求めて比較。

MV1

最小化 $V\left[R^{(1)}(\mathbf{x})\right]$

条件 $E\left[R^{(1)}(\mathbf{x})\right]=\rho$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\quad x_j \geq 0,\quad j=1,\ldots,n$$

MV2

最小化 $V\left[R^{(2)}(\mathbf{x})\right]$

条件 $E\left[R^{(2)}(\mathbf{x})\right]=\rho$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\quad x_j \geq 0,\quad j=1,\ldots,n$$

MV3

最小化 $V\left[R^{(3)}(\mathbf{x})\right]$

条件 $E\left[R^{(3)}(\mathbf{x})\right]=\rho$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\quad x_j \geq 0,\quad j=1,\ldots,n$$

提案

最小化 $\sum_{h=1}^{3} V[R^{(h)}(\mathbf{x})]$

条件 $E\left[R^{(h)}(\mathbf{x})\right]\geq \rho,\quad h=1,\ldots,3$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\quad x_j \geq 0,\quad j=1,\ldots,n$$

これら4つの方法により、それぞれポートフォリオを求め、比較検討する。

結果と考察

ρ＝1.5について考察

表1:事後データから得られる実際の収益率

ρ＝1．5	199604	199605	199606
提案	1.85541	1.55798	5.41886
MV1	2.73454	2.53991	8.04618
MV2	1.25218	2.41828	6.16574
MV3	1.91867	2.93378	7.35032

表2:$(\text{収益率}-\rho)^2$

ρ＝1．5	199604	199605	199606
提案	0.12631	0.00336	15.3575
MV1	1.52433	1.08141	42.852
MV2	0.06142	0.84324	21.7691
MV3	0.17528	2.05571	34.2263

表3: $\sum(\text{収益率}-\rho)^2$

ρ＝1．5	
提案	15.4872
MV1	45.4582
MV2	22.6738
MV3	36.4573

提案したモデルは3期間を見越して作成したので、$\sum(\text{収益率}-\rho)^2$ が最小になると予想していた。実際、求める収益率と得られた収益率の3期間を通じた乖離は提案方法が最も小さくなった。

４:ポートフォリオの売却時期について

ρ ＝1.5について考察

表4:得られたポートフォリオの実際の収益率

ρ＝1．5	199604	199605	199606
収益率	1.85541	1.55798	5.41886

表4について考察すると，投資家は収益率1．5を求めているので，1期末で1．5以上となった時点で売却すれば良い。

ところで、1期末で収益率が1.5未満だったとすると投資家は

１:収益率は上昇すると考えて2期末まで所有する。
２:２期末では更に収益率が下がると考えて売却する。

のどちらかの判断を下す。

１：収益率は上昇すると考えて2期末まで所有する。
２：２期末では更に収益率が下がると考えて売却する。

この判断を助ける指標をあたえられないであろうか。

考察を深めるために仮に1期末で収益率が１．３だったとする。

収益率が正規分布に従うと仮定すると

表5：提案方法による理論値

ρ＝１．５	1期末	2期末	3期末
収益率の期待値	1.5	2.77745	3.98077
分散	24.6723	51.0745	63.4301

表５より2期末において収益率が１．３以上になる確率は0.5793と計算できる。

この情報は投資家の判断の手助けになると考えられる。

５:提案方法の有意性の検討

表5:提案方法による理論値

ρ＝1．5	1期末	2期末	3期末
収益率の期待値	1.5	2.77745	3.98077
分散	24.6723	51.0745	63.4301

表6:３期先のリスクのみを考慮に入れたMV-modelによる理論値

ρ＝1．5	1期末	2期末	3期末
収益率の期待値	−	−	1.5
分散	−	−	34.7233

上の2つの結果の最大の*違いは1期末と2期末に関する情報の有無*である。表6からは1期末、2期末において収益率が1.5未満だった場合、投資家の判断の助けとなる指標を与えられない。

つまり

提案方法の最大の意義はある時点において売却すべきか否かの指標を与えられる点である。

６：おわりに

複数期にわたるリスクを考慮したポートフォリオを作成し、売却時点を判断するための指標を示すことができた。

指標を用いても、最終的な判断は投資家の勘や経験による。

各期末でその状態において投資家は、売却するべきか否かを確率モデル等で表現し、合理的な判断を行うことが課題。

参考文献

[1]今野浩:「理財工学Ｉ」, 日科技連（1995）
[2]今野浩:「線形計画法」, 日科技連（1987）
[3]今野浩:「数理決定法入門」, 朝倉書店（1992）
[4]福島雅夫:「数理計画入門」, 朝倉書店（1996）
[5]島谷明男:「Excel97 操作ハンドブック」, ナツメ社（1998）