DEAにおける効率的フロンティアの対話的探索

{()

小野田　晋（沼田　一道　助教授）

1．はじめに

多くの事業体の活動は一般に、複数の入力を複数の出力に変換する過程であるとみなすことができる。同種の活動を行う事業体が複数あるとき、変換の効率性を相対的に分析、評価する手法としてDEA (Data Envelopment Analysis)がある。DEAでは、現存する事業体群の活動をもとに事業体がとりうる活動を規定し、これを生産可能領域とよび、生産可能領域の中での効率的な活動の集合を効率的フロンティアという。効率的フロンティアは、活動の入出力項目数が少なければ（1入力1出力、2入力1出力など）、与えられた入出力項目のデータを用いて図示するなどして、比較的簡単に把握することができる。しかし、入出力項目数が増えると、効率的フロンティアを把握することは容易ではなくなる。例えば、活動可能な入力値に対応する効率的フロンティア上の活動の出力値は、1出力であれば一意に定まるが、多出力のときは一意に定まらない。そこで本研究では2入力2出力の問題をとりあげ、入力が与えられたとき、対応する効率的フロンティア上の出力を対話的に探索することを考える。そのためにDEAの出力モデルを変形させたモデルを提案し、そのモデルを扱うシステムを作成して効率的フロンティアの探索を行う。通常のDEAの出力モデルでは、出力項目が複数ある場合に、出力の構成比率を変化させないで一律に拡大し、効率的フロンティアに到達するある1つの改善点を求める。本研究では、出力を一律に拡大するのではなく、様々な割合で拡大した複数の改善点を求め、効率的フロンティアを把握する手がかりにする。

2．DEAの概要

DEAでは、分析対象であるm個の入力項目とｓ個の出力項目をもつ活動体をDMU(Decision Making Unit)とよび、ｎ個の活動があればDMU$_1$, DMU$_2$,…DMU$_n$と番号づけ、分析対象の活動をDMUaとする。
DMUjの入出力データを（$\mathbf{x}_j,\mathbf{y}_j$）、非負結合の変数ベクトルを$\lambda=(\lambda_1,\cdots\lambda_n)$とし、入力データ行列Xと出力データ行列Yは次のようになる。

$$X=(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)=\begin{bmatrix} X_{11}X_{12}\cdots X_{1n} \\ X_{21}X_{22}\cdots X_{2n} \\ \vdots \\ X_{m1}X_{m2}\cdots X_{mn} \end{bmatrix} \qquad Y=(\mathbf{y}_1,\cdots,\mathbf{y}_n)=\begin{bmatrix} Y_{11}Y_{12}\cdots Y_{1n} \\ Y_{21}Y_{22}\cdots Y_{2n} \\ \vdots \\ Y_{s1}Y_{s2}\cdots Y_{sn} \end{bmatrix}$$

生産可能領域

DEA では現存する DMU 群の活動をもとに、仮想的 DMU の活動のとりうる範囲を規定し、それを生産可能領域とよぶ。 その規定の条件を次に示すが、条件の与え方によって様々な DEA モデルが得られる。ここでは本研究で用いるモデルである CCR モデルと BCC モデルについて、生産可能領域の規定の条件を示す。

①現存する各 DMU の活動は生産可能領域に属する
②現存する DMU の活動の凸結合は生産可能領域に属する
③生産可能領域に属する活動を正数倍した活動は生産可能領域に属する
④生産可能領域に属する任意の活動に比べ、出力値が同じで入力値が大きい活動と入力値が同じで出力値

が小さい活動は生産可能領域に属する。

①~④をすべて満たす集合が CCR モデルの生産可能領域 P_{CCR} であり、次のようになる。

〈P-CCR〉

$$P_{CCR} = \{x, y \mid y \geq \lambda X, y \leq \lambda Y, \lambda \geq 0\}$$

①, ②, ④をすべてみたす集合が BCC モデルの生産可能領域 P_{BCC} であり、次のようになる。

〈P-BCC〉

$$P_{BCC} = \{x, y \mid x \geq \lambda X, y \leq \lambda Y, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1\}$$

生産可能領域に基づく DEA の効率値計算は、生産可能領域内で出力値を維持したまま入力値を一定の割合でどこまで縮小できるのか、または入力値を維持したまま出力値を一定の割合でどこまで拡大できるのか、を計算することである。入力値を縮小する場合を入力モデル、出力値を拡大する場合を出力モデルとよぶ。ここでは、本研究で用いる出力モデルの一般的な定式化(BCC モデル)を示す。

出力モデルは DMU_a の入力値を維持したまま、出力値を一律に η_a 倍拡大させることを考え、入出力の余剰を考慮して次のように定式化される。

第一目的関数 $\quad \max \quad \eta_a$

第二目的関数 $\quad \max \quad \sum_{i=1}^{m} sx_{ia} + \sum_{r=1}^{s} sy_{ra}$

制約式

$$X_{ia} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ja} X_{ij} + sx_{ia} \qquad (i = 1, \cdots, m)$$

$$\eta_a Y_{ra} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ja} Y_{rj} - sy_{ra} \qquad (r = 1, \cdots, s)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ja} = 1 \qquad \lambda_{ja} \geq 0 \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

効率的フロンティア

生産可能領域内で、入力値を維持したまま出力値をこれ以上増加させることができない, かつ出力値を維持したまま入力値をこれ以上減少させることができないような活動の集合を効率的フロンティアという。DEA における改善目標は、最終的には効率的フロンティア上のある１点を目指している。

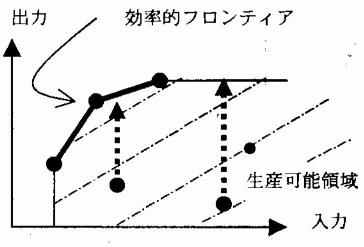


図１　１入力１出力の出力モデル(BCC)

出力モデルを用いて η を求める際、入出力の余剰を考慮しなければ、出力値を η 倍した点は効率的フロンティア、または生産可能領域の境界面のいずれかには到達しているが、効率的フロンティア上に到達しているとはかぎらない。入出力の余剰を考慮し、余剰がない場合は出力値を η 倍した点、余剰がある場合は出力値を η 倍し、余剰を考慮した点が効率的フロンティア上に到達する。

３．提案するモデル

２入力２出力の場合について取りあげる。n 個の DMU の入出力値により生産可能領域が定められる。任意の DMU_a を選び出力モデルを用いれば、点(X_{1a},X_{2a})を出発点として、２つの出力値(Y_{1a},Y_{2a})を生産可能領域内で一律に拡大し、最大限拡大可能な拡大率 η_a 倍したある 1 点が求められる。これは２つの出力項目の構成比率を変えないで効率化する方法であるので（構成比率 $Y_{1a}:Y_{2a}$)、ある１つの改善の活動を行っ

ていることになる。しかし、構成比率にとらわれずに様々な割合で出力値を拡大することができれば、無数の改善点を知ることができ、効率的フロンティアを把握する手がかりとなる。そこで、新たなパラメータ α を既存の DEA の出力モデルに導入し、α の値を変化させることによって、様々な改善の方向での η_a を探ることができるようにしたモデルを定式化し、次に示す。

(CCR モデル)

第一目的関数　max　η

第一目的関数　max　$sx_1+sx_2+sy_1+sy_2$

制約式

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11},\cdots,X_{1n} \\ X_{21},\cdots,X_{2n} \end{bmatrix} [\lambda_1,\cdots,\lambda_n]^T + \begin{bmatrix} sx_1 \\ sx_2 \end{bmatrix}$$

$$\eta \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11},\cdots,Y_{1n} \\ Y_{21},\cdots,Y_{2n} \end{bmatrix} [\lambda_1,\cdots,\lambda_n]^T - \begin{bmatrix} sy_1 \\ sy_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_j \geq 0 (j=1,\cdots,n)$$

(BCC モデル)

第一目的関数　max　η

第二目的関数　max　$sx_1+sx_2+sy_1+sy_2$

制約式

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11},\cdots,X_{1n} \\ X_{21},\cdots,X_{2n} \end{bmatrix} [\lambda_1,\cdots,\lambda_n]^T + \begin{bmatrix} sx_1 \\ sx_2 \end{bmatrix}$$

$$\eta \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11},\cdots,Y_{1n} \\ Y_{21},\cdots,Y_{2n} \end{bmatrix} [\lambda_1,\cdots,\lambda_n]^T - \begin{bmatrix} sy_1 \\ sy_2 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \qquad \lambda_j \geq 0 (j=1,\cdots,n)$$

$0 \leqq \alpha \leqq 1$ で α を変化させることで、様々な活動の方向が得られることになる。このとき、拡大する出力値の出発点は（α、$1-\alpha$）である。出力拡大の方向について調査したい方向があるならば、その方向を決定して提案したモデルを用いれば、効率的フロンティア上の出力値が求められる。効率的フロンティアの様子を把握したいと考えるならば、様々な方向での改善点を調査する必要がある。このとき α の値を 0.01 単位で変化させ、101 方向について余剰の有無と最大倍率 η を調べる。余剰がない方向の改善点は効率的フロンティア上にあるので、複数ある場合はその改善点を効率的フロンティアを把握する手がかりにする。余剰がある方向は、入力に余剰があれば余剰分だけ入力値を削減し、その入力値で出力の拡大方向を変えて調査するという指針を与える。出力のみに余剰があれば、その分を考慮した点は、入出力に余剰がない方向の改善点のいずれかになる。

4．対話的なシステムについて

プログラムは、Inprise 社の Delphi3.1 を用いて作成した。利用者が出力の拡大の方向を画面上のレバーを動かすことによって与え、対話的に任意の改善方向の出力値を求めることができるようになっている。

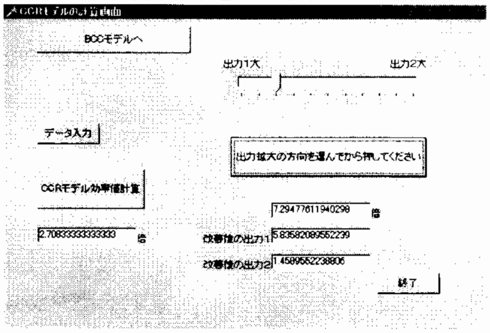


図２　操作画面

5．数値例

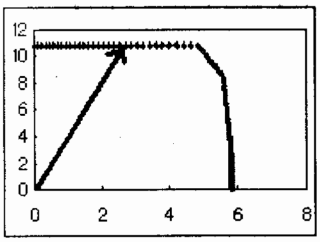
表１に示した仮想データを用いて、効率的フロンティアの探索の実験を行った。　DMU_1〜DMU_7 についてそれぞれ CCR,BCC の２つのモデルで実験した。入出力の余剰については、余剰があるかどうかの判定のみを行い、余剰を持たない方向、つまり η 倍した点が効率的フロンティアに到達する方向を探した。

表１　仮想データ

DMU	1	2	3	4	5	6	7
入力１	4	7	8	4	2	10	3
入力２	3	3	1	2	4	1	7
出力１	1	2	6	5	2	11	7
出力２	4	3	2	9	10	3	4

通常の DEA を行ったときの η

CCR	2.71	4.29	1.48	1	1	1	1
BCC	2.38	2.8	1	1	1	1	1



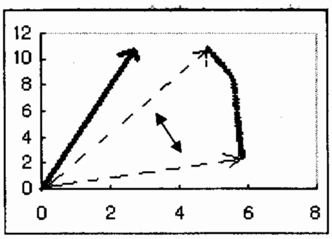
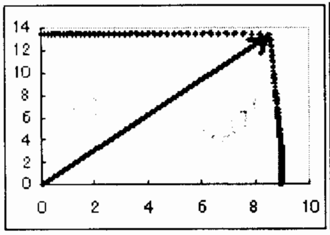


図 3.1DMU1 についての改善点(CCR) 図 3.2 図 3.1 の中で余剰がない点



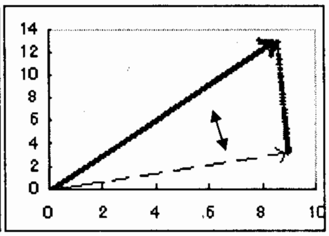
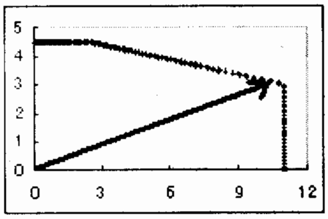


図 4.1 DMU2 についての改善点(CCR) 図 4.2 図 4.1 の中で余剰がない点



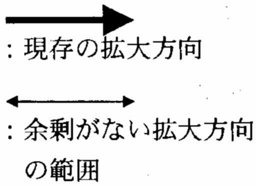


図 5 DMU6 についての改善点(CCR)

図 3.1～図 5 は横軸が出力 1、縦軸が出力 2 であり、0≦α≧1 でαを 0.01 ずつ動かしたときの($\eta\alpha$, $\eta(1-\alpha)$)をプロットしたものである。CCR モデルについて、DMU_1 では現存の方向(α=0.20)で拡大すると余剰があり効率的フロンティアに到達しないが、図 3.2 で示した範囲の方向(α=0.31～0.70)で余剰がなく、効率的フロンティアに到達する。DMU_2 では、現存の方向(α=0.40)でも効率的フロンティアに到達するが、他にも到達する方向(α=0.40～0.73)が存在することがわかる。しかし DMU_6 のように現存の方向以外では、効率的フロンティアに到達しない DMU もあった。現存の方向でのみ効率的フロンティアに到達するという傾向は、BCC モデルの場合に多くみられた。これは、現存する活動が効率的な活動をしていて、その活動が効率的フロンティアの角を形成しているときにおこると考えられる。

6.おわりに

本研究では、DEA で 2 入力 2 出力の場合に，様々な方向で出力値を改善することができるモデルを提案し，それを用いて出力値を改善するにあたっての効果的な拡大方向と，固定された入力値に対応する効率的フロンティア上の出力値の情報を得ることを可能にした。効率的フロンティアの全容を知るには至っていないが，改善目標となる部分的な効率的フロンティアを把握することはできるようになったと考えられる。さらに入出力の項目数が増えたものにも対応することができるようにするためには，複数の入出力値を改善する，改善方向の決定を支援する仕組みと，部分的な効率的フロンティアの様子を表示する方法が必要であると考えられるが，これらは今後の課題である。

[参考文献]

[1]刀根　薫：「経営効率性の測定と改善-包絡分析法による-」，日科技連出版社(1993)

[2]横田　敏弘：「施策，方針の効果を DEA に基づき判定する方法について」，東京理科大学大学院工学研究科経営工学専攻修士論文(1998)

[3]今野　浩：「線形計画法」、日科技連出版社(1987)

[4]村上　宣寛：「やさしい Delphi」、日刊工業新聞社(1997)