小選挙区決定問題
～グラフによる定式化と厳密解法～

矢城　修一（沼田一道助教授）

1．はじめに

日本国憲法は、国民主権の下で代表民主制を統治の原則として採用しており、選挙は主権者である国民の意思を表明する手段として重要な意味をもっている。しかし日本国憲法は平等選挙をその原則としているにもかかわらず、現行の議員定数配分規定では投票価値の平等が守られていないと指摘されている。いわゆる「一票の格差」と呼ばれるものである。この「一票の格差」を最小にする問題は、「議員定数配分問題」［1］として古くから研究がなされているが、本研究では衆議院議員選挙で採用されている小選挙区制を取り上げ、選挙区割りにより生じる「一票の格差」を出来る限り小さくする「小選挙区決定問題」を考える。稲生［2］はこの問題を定式化し近似解法を提案したが、本研究では分枝限定法を用いた厳密解法を提案する。

2．小選挙区決定問題

小選挙区決定問題とは、各都道府県を、そこに配分された議員数分の小選挙区に分割する問題である。この時、全ての小選挙区ができるだけ均等な有権者数を持つように分割したい。また、小選挙区の構成単位（市区町村：以下“小地域”と呼ぶ）は、飛び地がないよう連結していなければならない。このような問題は、分割の仕方を全て列挙して調べれば可能であるが、問題の規模が大きくなるに従い可能な解の組み合わせが飛躍的に増加するので、いかに効率良く数え上げを行うかが重要となる。

2．1グラフによるモデル化

グラフとは、頂点と呼ばれる要素の有限集合 $V=\{v_1、v_2、\cdots、v_n\}$ と、それらをつなぐ枝と呼ばれる集合 E からなり、$G=(V、E)$ と記される。本研究では、各頂点 $V_i(i=1,2,\cdots,n)$ が各小地域を表し、各小地域間が隣接していることを枝 E によって表す。例えば、枝 $e=(v_i, v_j)$とは、頂点（小地域）v_i，v_j が隣接するという。各頂点には、有権者数を表す重みを対応させる。そしてこのグラフ G を出来る限り均等な有権者数をもつ幾つかの部分集合 R_i（$i=1,2,\cdots,m$）に分割することが本研究の目標である。

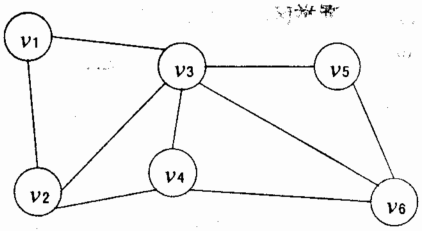


図1　グラフ

2．2．モデルの定式化

n を小地域の総数、m を小選挙区数、N を小地域の集合 $N=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$、M を小選挙区の集合 $M=\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$、p_i を小地域 i の有権者数とする。さらに、小地域 i が小選挙区 j に所属しているか否かを表す変数を x_{ij} $(i\in N, j\in M)$ とする。$x_{ij}=1$ のとき、小地域 i の有権者は小選挙区 j に所属していることを表し、$x_{ij}=0$ のとき、小地域 i の有権者は小地域 j に所属しないことを表す。小選挙区決定問題は以上の記号を用いて次のように定式化される。

$$\textit{Minimize} \quad \max_{j\in M}\sum_{i\in N} p_i x_{ij} \Big/ \min_{k\in M}\sum_{i\in N} p_i x_{ik}$$

制約条件 $\sum_{j \in M} x_{ij} = 1 \ , \ i \in N$ ・・・(1)

$\{ i \mid x_{ij} = 1 \}$ から誘導される部分グラフR_j は連結 ・・・(2)

目的関数は、有権者数が最大の小選挙区を、有権者数が最小の小選挙区で割ることにより「一票の格差」を求め、それを最小化することを示している。

（1）は、小地域 i は必ず何処かの小選挙区に含まれなければならないことを表す。

（2）は、小選挙区は必ず連結した小地域から成り立っていることを表す。

3．分枝限定法

分枝限定法は、分枝操作と限定操作から構成され、これらの操作を繰り返し行うことにより、与えられた組み合わせ最適化問題（P_0）を解こうとする方法である。

3．1．分枝操作

5つの小地域を3つの小選挙区に分割する問題（P_0）を例に取り説明する。まず最初に調べる小地域は、どの小選挙区に入れても無差別であるので、小選挙区１に固定される。従って次に調べる小地域は、小選挙区１もしくは小選挙区２に含まれる事になる。同様に残りの小地域についても調べると図２のようになる。以上のように、各小地域を所属できる可能性のある小選挙区に分け入れていく事を分枝操作とし、その時々の状態で解く問題を子問題と呼ぶ。小選挙区決定問題に対する子問題は、N'を未割り当ての小地域集合、c_j を小選挙区 j に既に割り当てられた有権者数とすると、次のように定式化される。

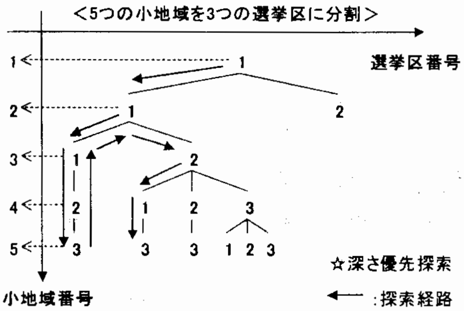


図２．分枝限定木

$$\text{Minimize} \quad \frac{\max_{j \in M} \sum_{i \in N'} p_i x_{ij} + c_j}{\min_{k \in M} \sum_{i \in N'} p_i x_{ik} + c_k}$$

制約条件 $\sum_{j \in M} x_{ij} = 1 \quad , \quad i \in N'$

$\{ i \mid x_{ij} = 1 \} \cup$｛小選挙区に配分されている小地域｝から導かれる部分グラフR_j は連結

3．2．限定操作

以上のように分枝を繰り返していくと組合せを全部列挙することになり、時間がかかる。そこで、解を探索しなくても良い領域（解かなくても良い問題）を探す。分枝操作の途中に見つかった、（P_0）の良い実行可能解を暫定解と呼び、記憶する。解こうとする子問題の最適解が分からなくても、暫定解よりも良い解が得られない事が保証できれば、その子問題は解かなくても良い。これが限定操作である。この限定操作は、子問題の緩和問題の最適目的関数値を求め、暫定解とこの最適目的関数値とを比較することにより行う。ここで、緩和問題とは制約条件を緩和した問題の事である。小選挙区決定問題の緩和問題は、U を未割り当ての有権者総数($= \sum_{i \in N'} p_i$)、y_j を小選挙区 j に新たに割り当てられる有権者数（変数）として、次のように定式化される。

$$\textit{Minimize} \quad \max_{j \in M} (c_j + y_j) \Big/ \underset{k \in M}{mim} (c_k + y_k)$$

$$\text{制約条件} \quad \sum_{j \in M} y_j = U$$

$$y_j \geq 0$$

子問題が未割り当ての小地域の連結を考慮して解いているのに対し、緩和問題では小地域の自由な分割を許し、小地域間の連結性を無視して未割り当ての有権者数を各小選挙区の有権者数が均等になるよう、すなわち目的関数値が最小となるように分配するので、子問題に比べ簡単に解く事ができる。そして緩和問題を解いた結果、緩和問題の解が暫定解よりも大きい時に（限定操作によって見切られた時に）分枝操作を停止し、その子問題を分割するのをやめる。分枝限定木において、子問題が分割されておらず、分枝が停止していない頂点を未分枝頂点と呼び、分枝操作、限定操作を繰り返し行い、未分枝頂点が全てなくなったとき、解の探索は終了し、その時点で最も良い暫定解が最適解となる。

３．２．１．限定操作（１）　～緩和問題～

小地域 i が小選挙区 j に所属する事が出来るかどうか（分枝が停止するかどうか）を緩和問題で判別する際、①小地域 i から小選挙区 j に到達するまでの経路で、有権者数の累計が最小となる経路（最小有権者数経路）を探す。②その最小有権者数を、小地域 i を小選挙区 j に含める時の有権者数とし、残りの未割り当ての小地域についての緩和問題を解く。③緩和問題の解と暫定解とを比較し、もし緩和問題の解が暫定解よりも大きければ分枝を停止し、次の未分枝頂点を探索する。最小有権者数経路が存在しない場合も分枝を停止する。

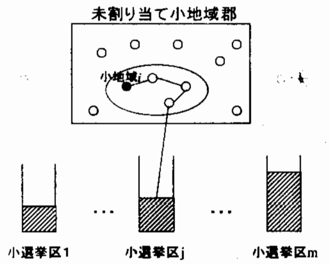


図３．限定操作（１）－①

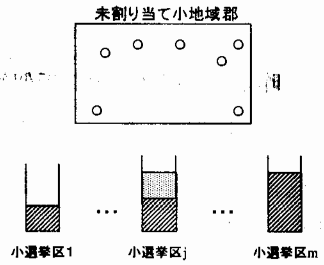


図４．限定操作（１）－②

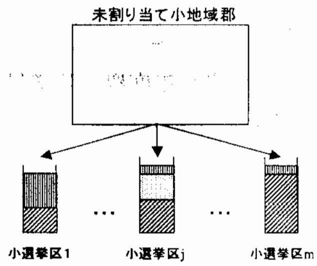


図５．限定操作（１）－③

既に割り当てられた有権者数　最小有権者数　未割り当ての有権者数

３．２．２．限定操作（２）　～分枝の順序～

既に調べたどの小地域からも、経路上の有権者数が最も大きくなるような小地域を、次に調べる小地域の候補にする。例えば、図６のような場合、①まず小地域１は小選挙区１に固定される。②次に、小地域１から経路上の有権者数が最も大きい小地域２が小選挙区１に含まれるかどうか緩和問題により判定する。その際、小地域２から小選挙区１に至る最小有権者数経路が２→D→G→１の時、もし小選挙区１の有権者数にその最小有権者数を加えた時

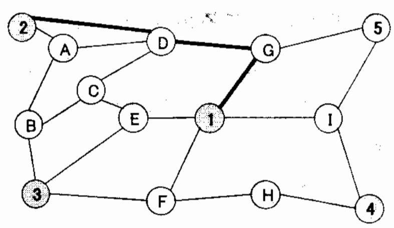
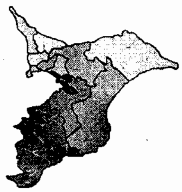


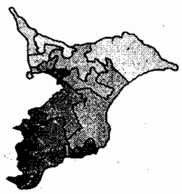
図６．限定操作（２）

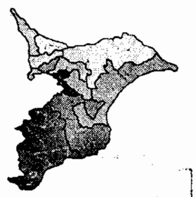
の有権者数が、1 小選挙区当たりの平均有権者数（全有権者数を小選挙区数で割ったもの：以下“平均”と呼ぶ）よりも大きい場合、緩和問題により打ち切られる可能性が高くなる。もし打ち切られてしまったのなら、分枝は停止し小地域２は小選挙区２に固定される事になる。③同様に小地域３、４、５もそれぞれ小選挙区３、４、５で固定される可能性がある。小地域が固定されてしまう事は、小地域の数が減る事と同様な効果をもたらすので、計算量を飛躍的に減少させる事が出来る。

4．実験

平成 8 年度衆議院議員選挙のデータを元に、例題として千葉県における 48 の小地域（市区町村）を千葉県選出の議員数 12 の小選挙区に分割する。その際、前処理として以下の①～④を順に行う。①１つの小選挙区を構成する有権者数の上限値（その値を超えると格差が初期暫定値を超えてしまうような有権者数）と下限値（その値を下回ると格差が初期暫定値を超えてしまうような有権者数）を求める。②町村で構成される「郡」は、基本的に 1 つの小地域とみなす。③1 つの小地域としか隣接していない小地域のうち、その有権者数が下限値に満たない小地域は、その唯一接している小地域と同じ小地域とみなす、④隣接している小地域の有権者数を加えると、必ず上限値を超えてしまう小地域は、１つの小選挙区に割り当てる。以上の操作の結果、上記の問題は、42 の小地域を 10 の小選挙区に分割する問題へと見直される。以下、千葉県に対して分枝限定法を適用した結果を示す。比較として、平成 8 年度衆議院議員選挙時と昨年度の研究における 1 票の格差も合わせて示す。


平成 8 年度衆議院議員選挙時
1 票の格差：1.280 倍


昨年度の研究結果（近似解）
1 票の格差：1.206 倍


本年度の研究結果（厳密解）
1 票の格差：1.203 倍

5．まとめ

本研究では、グラフを用いて小選挙区決定問題を定式化し、最適分割を求める厳密解法を提案した。しかしながら厳密解法には膨大な計算時間を必要とする。限定操作１・２を組み込まない場合、山口県（1 時間）程度の規模なら解く事が出来たが、茨城県、千葉県に至っては解を求める事が出来なかった。これに対し、限定操作１・２を組み込んだ場合、山口県・2 分、茨城県・20 分、千葉県・200 時間と飛躍的に計算時間を短縮する事に成功した。しかしながら東京都や大阪府といった大規模な地域は現在のところ解を求めるのに成功していない。これら大規模地域を解くには、現在よりも良い限定条件、初期暫定値、分枝順序などが必要とされる。また今回の研究では、その対象となる地域の歴史的・政治的・地理的要件というものを考慮していない為、実状にそぐわない分割結果を得る可能性がある。そういった条件を考慮した定式化も今後の課題である。

6．参考文献

[1]大山達雄：最適化モデル分析、日科技連、1993.
[2]稲生匡昭：「小選挙区決定問題」、1999 年度東京理科大学工学部経営工学科卒業研究論文
[3]選挙結果調、平成 8 年度衆議院議員選挙、千葉県選挙管理委員会、平成 8 年度