DEAにおける効率的フロンティアの対話的探索

東京理科大学工学部経営工学科
沼田研究室
４４９６０２４　　　　小野田　晋

発表構成

２０００年 ２月１６日（水）

1. はじめに

事業体の活動

複数の入力 → 変換 → 複数の出力

<u>変換の効率の相対的評価法；DEA(Data Envelopment Analysis)</u>

<u>評価対象</u>

多入力多出力系の活動体:DMU(Decision Making Unit)

DMU_1

DMU_n

→ 現存する活動をもとに、<u>とりうる活動</u>を規定

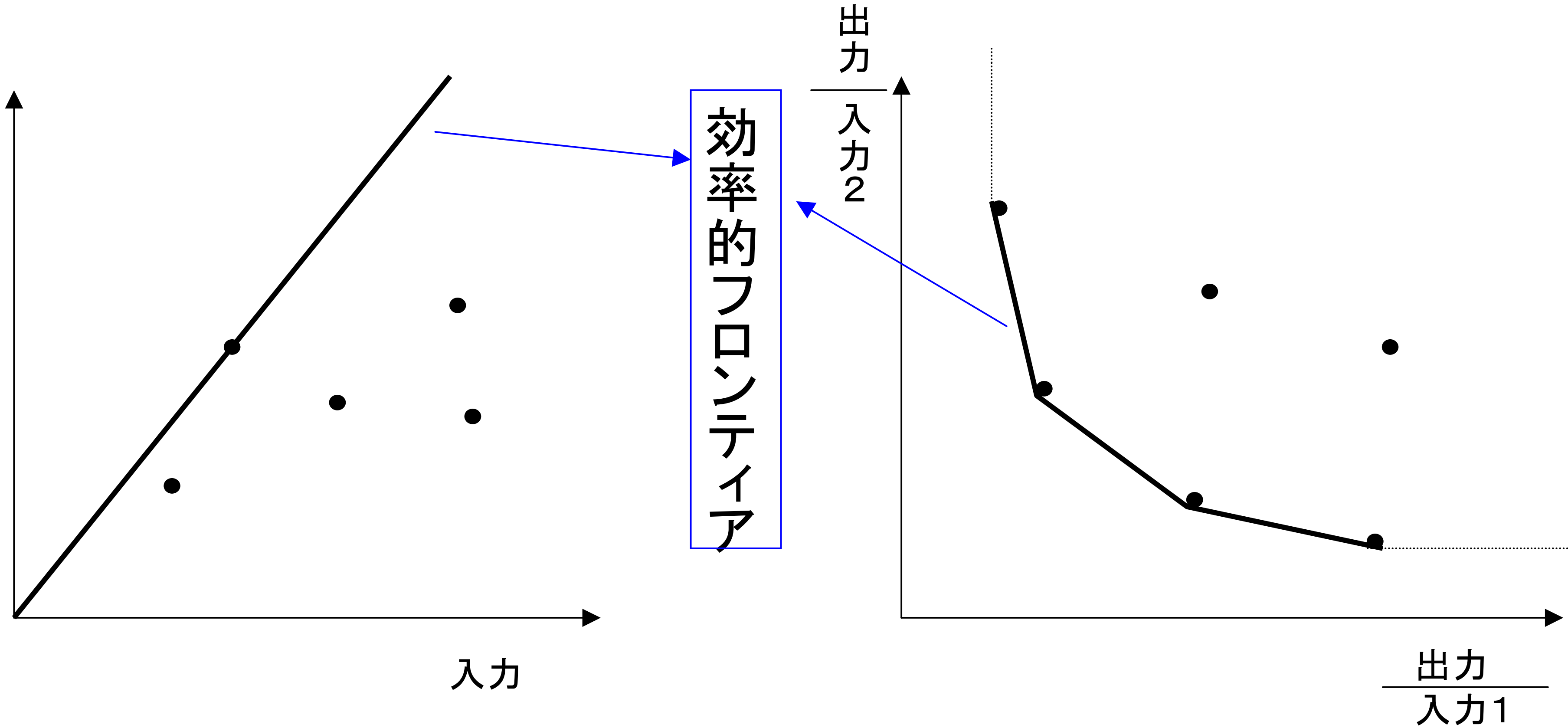
‖

生産可能領域

生産可能領域内の効率的な活動の集合＝効率的フロンティア

2. 研究目的(1)

1入力1出力、2入力1出力などの効率的フロンティア → 図示して容易に把握可能



1入力1出力(CCRモデル)　　2入力1出力(CCRモデル)

2. 研究目的(2)

入出力項目の数が増える → 効率的フロンティアは容易に把握できなくなる

そこで

既存の出力モデルをもとに、新たなモデルを提案して対話的に効率的フロンティアを探索する

→ ２入力2出力でCCRモデル、BCCモデルに対応したシステムを作成

3. DEAの概要

3.1 記号の定義

n個のDMU: $DMU_1, \ldots, DMU_n$

DMU_a:分析対象のDMU(aは1~nのいずれか)

DMU_jの入出力データ(入力項目数:m　出力項目数:s): $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$

$$X = (x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \Lambda & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \Lambda & X_{2n} \\ M & & & M \\ X_{m1} & X_{m2} & \Lambda & X_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Y = (y_1, \ldots, y_n) = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \Lambda & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \Lambda & Y_{2n} \\ M & & & M \\ Y_{s1} & Y_{s2} & \Lambda & Y_{sn} \end{bmatrix}$$

$\lambda = (\lambda_1, \Lambda, \lambda_n)$:非負結合の変数

P:生産可能領域

3. DEAの概要

3.2 生産可能領域

生産可能領域＝ 現存するDMU群の活動をもとに規定された仮想的DMUの活動のとりうる範囲

規定の条件によっていくつかのモデルが提案されている

本研究で取り扱うCCRモデルとBCCモデルの生産可能領域の規定の条件について示す

3. DEAの概要

3.3 CCRモデルの生産可能領域

(1.1)現存する各DMUの活動は生産可能領域に属する

$$(x_j, y_j) \in P \qquad (j = 1, \Lambda, n)$$

(1.2)現存するDMUの活動の凸結合は生産可能領域に属する

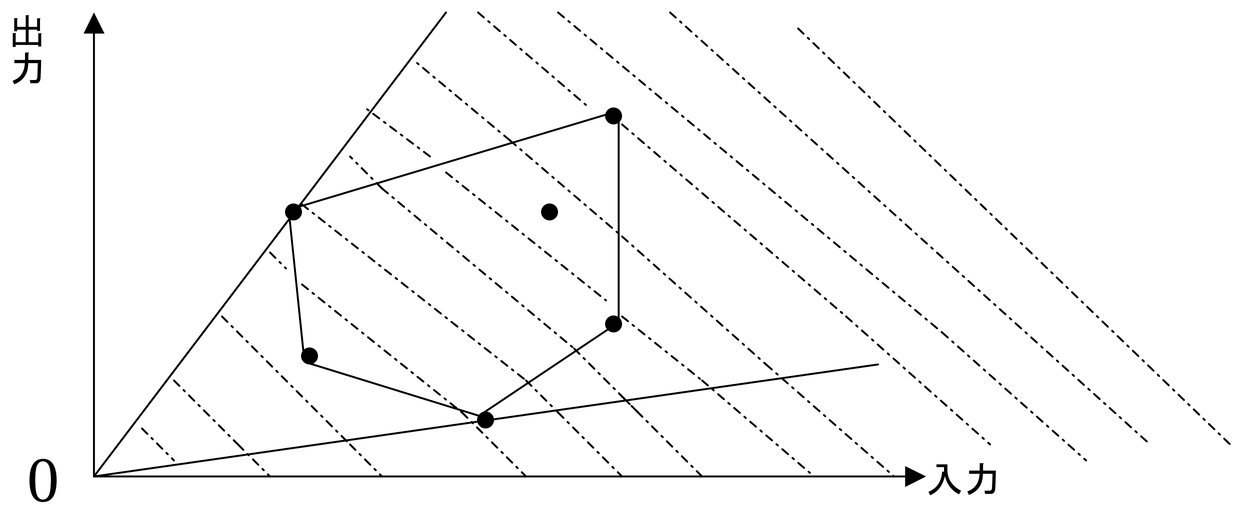
$$\{(x, y) \mid x = \lambda X, y = \lambda Y\} \subset P \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

(1.3)生産可能領域に属する活動を非負数倍した活動は生産可能 領域に属する

$$(x, y) \in P \Rightarrow (kx, ky) \in P \qquad k：\text{任意の非負数}$$

(1.4)生産可能領域に属する任意の活動 (x,y)について、出力値が同じで入力値が大きい、または入力値が同じで出力値が小さい活動は生産可能領域に属する。

$$\{(\bar{x}, \bar{y}) \mid \bar{x} \geq x, \quad \bar{y} \leq y, \exists (x, y) \in P\} \subset P$$



3. DEAの概要

3.4 BCCモデルの生産可能領域

(2.1)現存する各DMUの活動は生産可能領域に属する

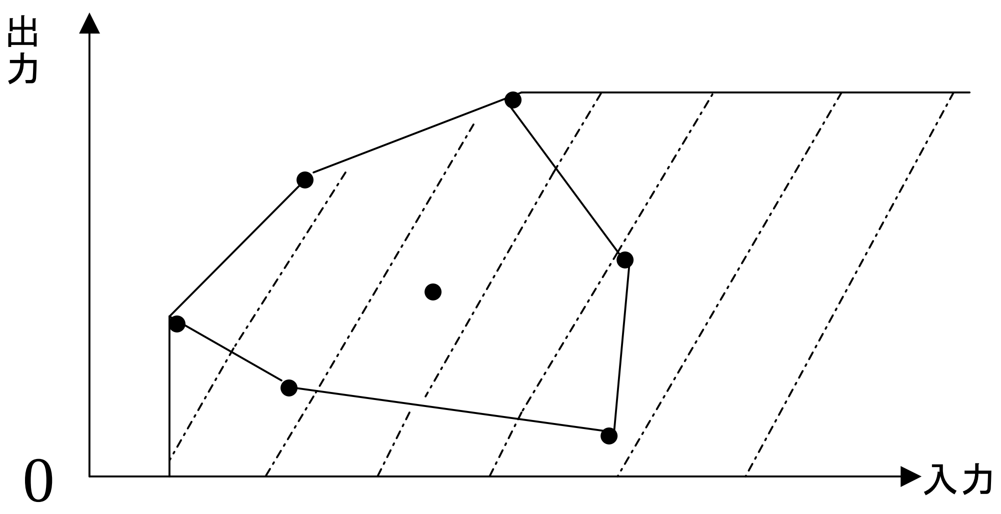
$$(x_j, y_j) \in P \quad (j = 1, \Lambda, n)$$

(2.2)現存するDMUの活動の凸結合は生産可能領域に属する

$$\{(x, y) \mid x = \lambda X, y = \lambda Y\} \subset P \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

(2.3)生産可能領域に属する任意の活動に比べ、出力値が同じで入力値が大きい、または入力値が同じで出力値が小さい活動は生産可能領域に属する

$$\{(\overline{x}, \overline{y}) \mid \overline{x} \geq x, \quad \overline{y} \leq y, \exists (x, y) \in P\} \subset P$$



3. DEAの概要

3.5 CCRモデル、BCCモデルの生産可能領域

CCRモデルの生産可能領域

〈P−CCR〉

$$P = \{ x, y \mid x \geq \lambda X , y \leq \lambda Y , \lambda \geq 0 \}$$

BCCモデルの生産可能領域

〈P−BCC〉

$$P = \{ x, y \mid x \geq \lambda X , y \leq \lambda Y , \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \}$$

3. DEAの概要
3.6 出力モデル(1)

――― 生産可能領域に基づく出力モデル ―――

複数の出力があるとき

出力モデル ＝ 生産可能領域内で、DMU_aの出力値を入力値を維持したまま一律に拡大してどれだけ拡大できるかを計算するモデル

3. DEAの概要

3.6 出力モデル(2)

出力モデル

第一目的関数 $\max \quad \eta_a$

第二目的関数 $\max \quad \sum_{i=1}^{m} sx_{ia} + \sum_{r=1}^{s} sy_{ra}$

制約式

$$X_{ia} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ja} X_{ij} + sx_{ia} \qquad (i = 1, \Lambda, m)$$

$$\eta_a Y_{ra} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ja} Y_{rj} - sy_{ra} \qquad (r = 1, \Lambda, s)$$

$$\lambda_{ja} \geq 0 \qquad (j = 1, \Lambda, n) \qquad (CCR\text{モデル})$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ja} = 1 \qquad (BCC\text{モデル})$$

入力の余剰

出力の不足

3. DEAの概要

3.7 効率的フロンティア(1)

<u>効率的フロンティア</u>

||

生産可能領域内で、

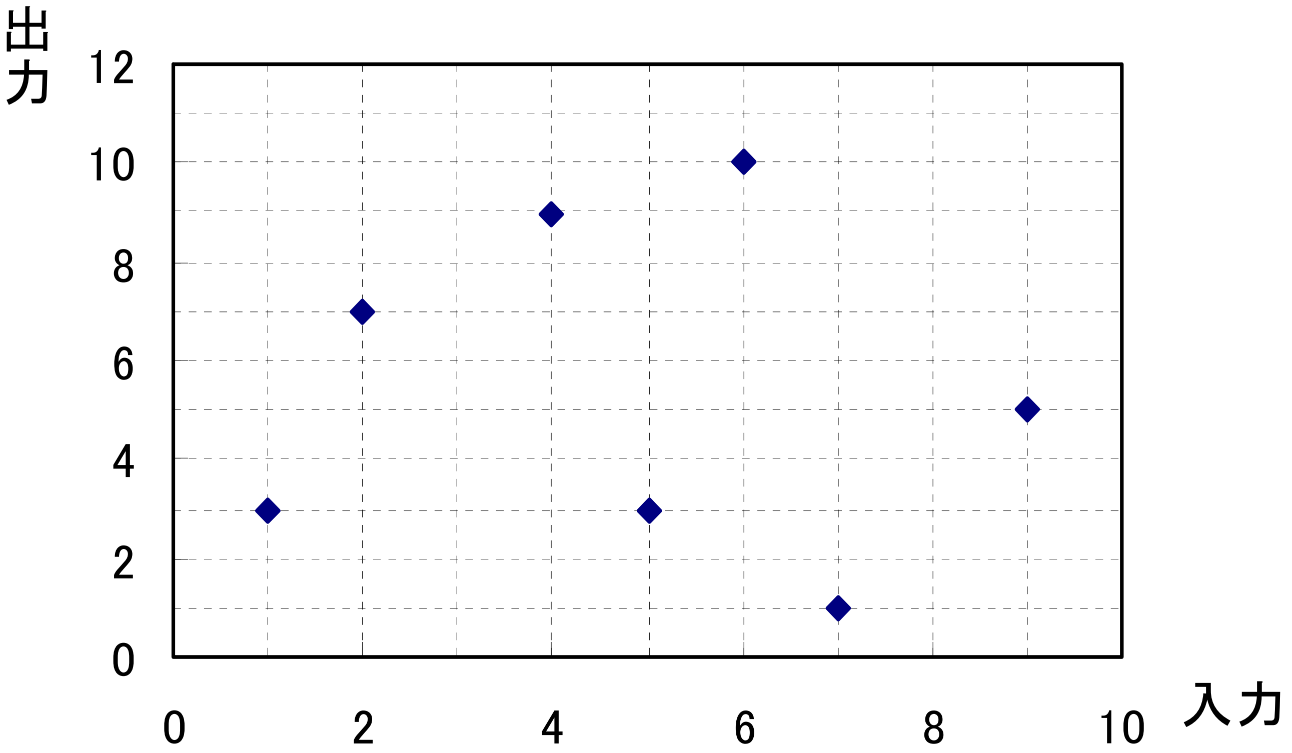
- 入力値を維持したまま出力値をこれ以上増加させることができない
  かつ
- 出力値を維持したまま入力値をこれ以上減少させることができない

ような活動の集合

3. DEAの概要

3.7 効率的フロンティア(2)

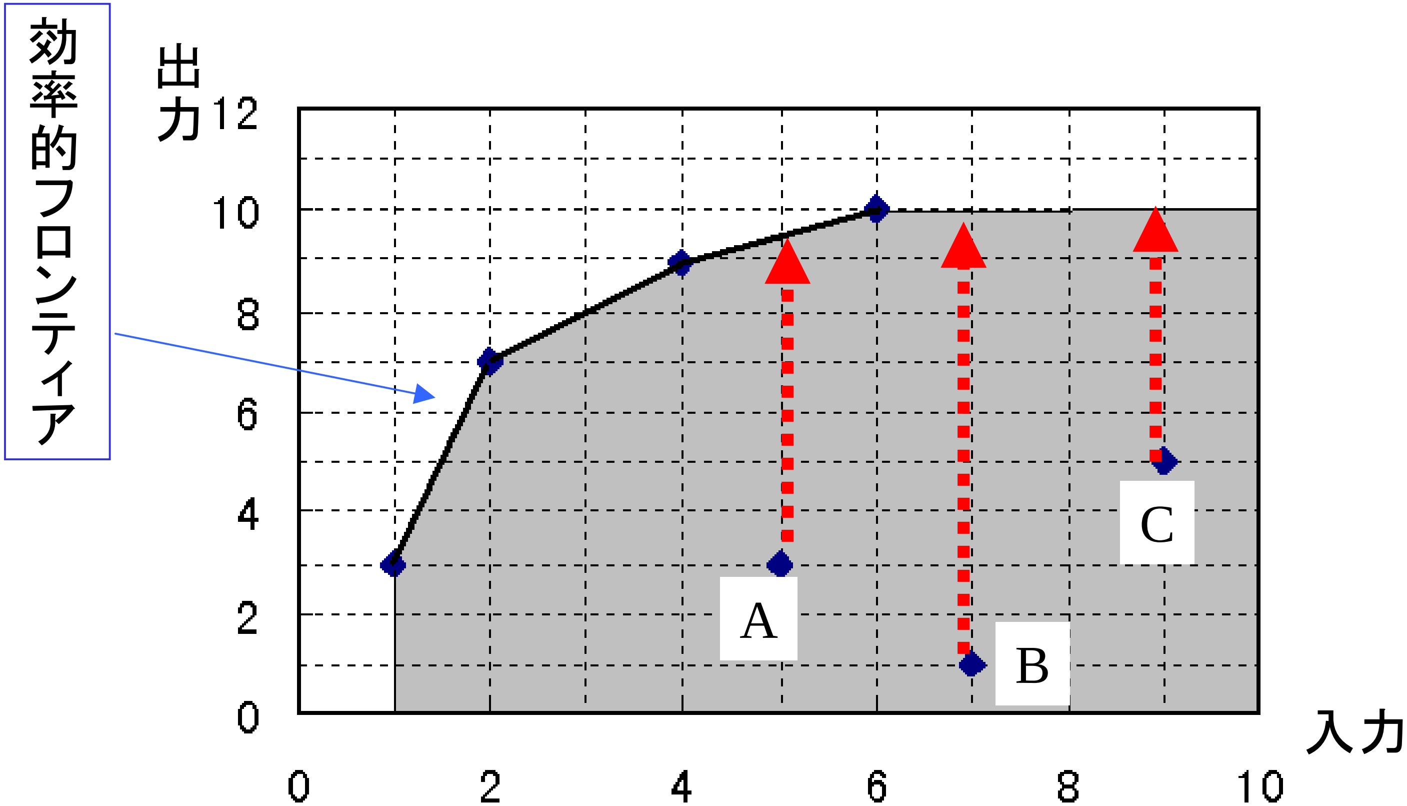
ー1入力1出力(BCCモデル)の例ー



3. DEAの概要

3.7 効率的フロンティア(3)

ー1入力1出力(BCCモデル)の例ー



最終的に効率的フロンティアを目指している

4. 研究内容

4.1 提案するモデル(1)

通常の出力モデルを用いる

活動可能な入力値に対応する効率的フロンティア上のある1点が求められる

複数の出力の構成比率を変化させないで出力値を一律に拡大した点

いろいろな割合で出力値を拡大して、効率的フロンティア上の複数の点が求められたならば

多入力多出力のときの効率的フロンティアを把握する手がかりになる

本研究では2入力2出力の効率的フロンティアを探索する

4. 研究内容

4.1 提案するモデル(2)

通常の2入力2出力の出力モデル(CCRモデル、BCCモデル)

第一目的関数　max　η_a

第二目的関数　max　$sx_1 + sx_2 + sy_1 + sy_2$

制約式

$$\begin{bmatrix} X_{1a} \\ X_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}, \Lambda\ , X_{1n} \\ X_{21}, \Lambda\ , X_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{1a} \\ \mathrm{M} \\ \lambda_{na} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sx_1 \\ sx_2 \end{bmatrix}$$

α

$$\eta_a \begin{bmatrix} Y_{1a} \\ Y_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}, \Lambda\ , Y_{1n} \\ Y_{21}, \Lambda\ , Y_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{1a} \\ \mathrm{M} \\ \lambda_{na} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} sy_1 \\ sy_2 \end{bmatrix}$$

$(1-\alpha)$

$$\lambda_{ja} \geq 0 \quad (j = 1, \Lambda\ , n) \quad CCR\ \text{モデル}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ja} = 1 \qquad BCC\ \text{モデル}$$

4. 研究内容

4.1 提案するモデル(3)

出力値の拡大の方向を変化させたい

→ 新たなをパラメータを導入し、一律拡大ではなく
割合を変化させて出力を拡大する

現存するDMUの出力値で効率計算を行う

||

出力1:出力2の割合を変化させないで拡大

$$\eta\begin{bmatrix}\alpha\\1-\alpha\end{bmatrix}$$

→ α の値を変化させることで、様々な割合での拡大が実現できる $(0 \le \alpha \le 1)$

4. 研究内容

4.2 提案するモデルの定式化

新しいモデルを定式化する

第一目的関数 $\max \quad \eta$

第二目的関数 $\max \quad sx_1 + sx_2 + sy_1 + sy_2$

制約式

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}, \Lambda, X_{1n} \\ X_{21}, \Lambda, X_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \mathrm{M} \\ \lambda_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sx_1 \\ sx_2 \end{bmatrix}$$

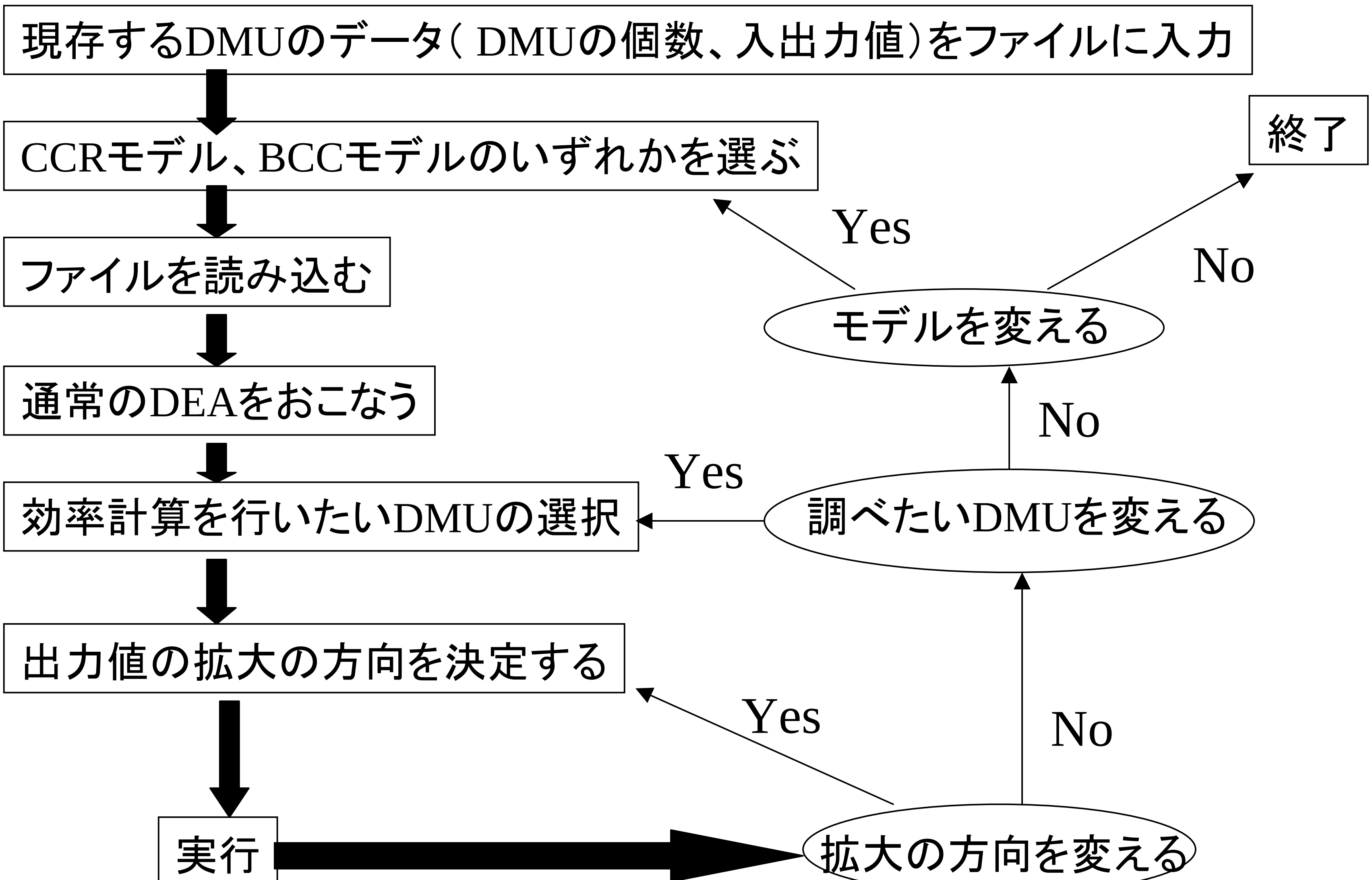
$$\eta \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}, \Lambda, Y_{1n} \\ Y_{21}, \Lambda, Y_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \mathrm{M} \\ \lambda_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} sy_1 \\ sy_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, \Lambda, n) \qquad CCR \text{ モデル}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \qquad BCC \text{ モデル}$$

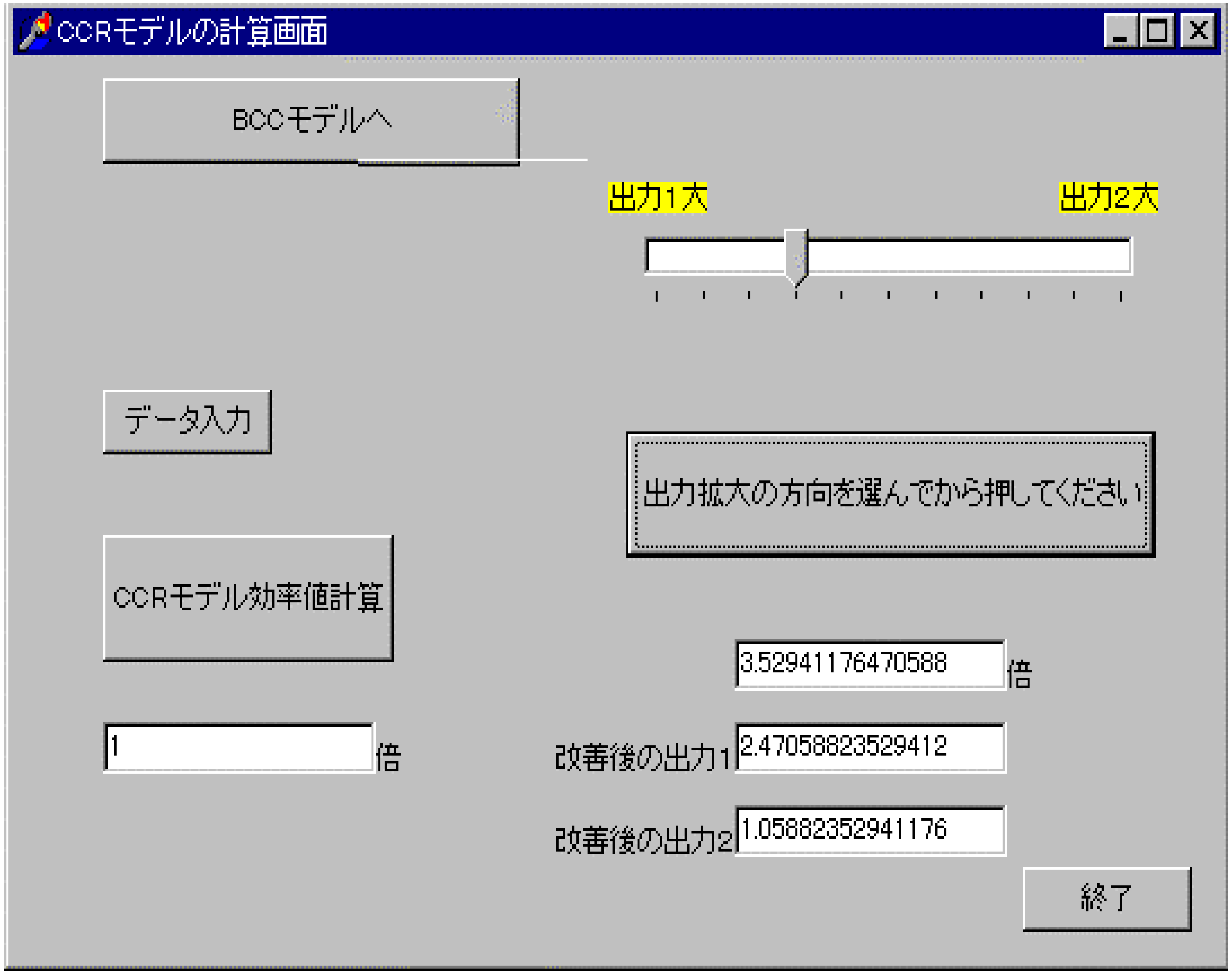
4. 研究内容

4.3 提案する対話的システム(1)



4. 研究内容

4.3 提案する対話的システム(2)



5.数値実験(1)

入力:医師と看護婦の1ヶ月
当たりの総勤務時間数

出力:外来と入院の保険点数

用いる2入力2出力データ

DMU	入力1	入力2	出力1	出力2
病院	医師	看護婦	外来	入院
H1	3008	20980	97775	101225
H2	3985	25643	135871	130580
H3	4324	26978	133655	168473
H4	3534	25361	46243	100407
H5	8836	40796	176661	215616
H6	5376	37562	182576	217615
H7	4982	33088	98880	167278
H8	4775	39122	136701	193393
H9	8046	42958	225138	256575
H10	8554	48955	257370	312877
H11	6147	45514	165274	227099
H12	8366	55140	203989	321623
H13	13479	68037	174270	341743
H14	21808	78302	322990	487539
	(時間)		(点)	

5.数値実験(2)

```
 1 -th DMU  効率値  =  0.95456 <x>       ( 1.04760)
>>  ***  alpha =  0.00000 最大倍率  = 121686.07384 <x>    ( F.v1 = 0.000,      F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
    ***  alpha =  0.01000 最大倍率  = 122915.22610 <x>    ( F.v1 = 1229.152,   F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
    ***  alpha =  0.02000 最大倍率  = 124169.46310 <x>    ( F.v1 = 2483.389,   F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
    ***  alpha =  0.03000 最大倍率  = 125449.56066 <x>    ( F.v1 = 3763.487,   F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
    ***  alpha =  0.04000 最大倍率  = 126756.32692 <x>    ( F.v1 = 5070.253,   F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
    ***  alpha =  0.05000 最大倍率  = 128090.60404 <x>    ( F.v1 = 6404.530,   F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
    ***  alpha =  0.06000 最大倍率  = 129453.27004 <x>    ( F.v1 = 7767.196,   F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
    ***  alpha =  0.07000 最大倍率  = 130845.24069 <x>    ( F.v1 = 9159.167,   F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
    ***  alpha =  0.08000 最大倍率  = 132267.47156 <x>    ( F.v1 = 10581.398,  F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
    ***  alpha =  0.09000 最大倍率  = 133720.96026 <x>    ( F.v1 = 12034.886,  F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
    ***  alpha =  0.10000 最大倍率  = 135206.74871 <x>    ( F.v1 = 13520.675,  F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
    ***  alpha =  0.11000 最大倍率  = 136725.92566 <x>    ( F.v1 = 15039.852,  F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
    ***  alpha =  0.12000 最大倍率  = 138279.62936 <x>    ( F.v1 = 16593.556,  F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
    ***  alpha =  0.13000 最大倍率  = 139869.05039 <x>    ( F.v1 = 18182.977,  F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
    ***  alpha =  0.14000 最大倍率  = 141495.43470 <x>    ( F.v1 = 19809.361,  F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
    ***  alpha =  0.15000 最大倍率  = 143160.08687 <x>    ( F.v1 = 21474.013,  F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
    ***  alpha =  0.16000 最大倍率  = 144864.37362 <x>    ( F.v1 = 23178.300,  F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
    ***  alpha =  0.17000 最大倍率  = 146609.72752 <x>    ( F.v1 = 24923.654,  F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
    ***  alpha =  0.18000 最大倍率  = 148397.65102 <x>    ( F.v1 = 26711.577,  F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
    ***  alpha =  0.19000 最大倍率  = 150229.72079 <x>    ( F.v1 = 28543.647,  F.v2 = 121686.074 ) < ooxo>
```

[1] [2] [3] [4] [5]

[1]: αの値

[2]:最大倍率

[3],[5]:入力の余剰、出力の不足の有無

[4]:出力の改善値

5.数値実験(3)

全てのDMUについて $0 \le \alpha \le 1$ の範囲で α を0.01きざみで変化させて調査

↓

101の拡大方向について入力の余剰、出力の不足の有無を調べる

- 余剰、不足がない方向 → 効果的な拡大方向:
出力を拡大した点は
効率的フロンティア上にある
- 出力の不足のみある方向 → 不足分出力を増やした点が効率的フロンティア上にある
- 入力に余剰がある方向 → 余剰分入力を削減した点が効率的フロンティア上にある

5.数値実験(4)

通常の出力モデルを用いたときの拡大率と拡大方向のαの値

病院	α	CCRモデル		BCCモデル	
H1	0.491	1.0476	△	1	○
H2	0.510	1	◎	1	◎
H3	0.442	1	◎	1	○
H4	0.315	1.42485	△	1.27951	△
H5	0.450	1.20924	×	1.19849	×
H6	0.456	1	○	1	○
H7	0.372	1.18471	◎	1.18301	◎
H8	0.414	1	○	1	○
H9	0.467	1.00547	×	1.00434	×
H10	0.451	1	○	1	○
H11	0.421	1.09587	△	1.07633	×
H12	0.388	1.03204	◎	1	○
H13	0.338	1.2724	×	1.1258	×
H14	0.398	1.02646	×	1	○

×：全ての方向に入力の余剰があるもの

△：出力の不足のみの方向があるもの

○：現存の拡大方向のみが効果的なもの

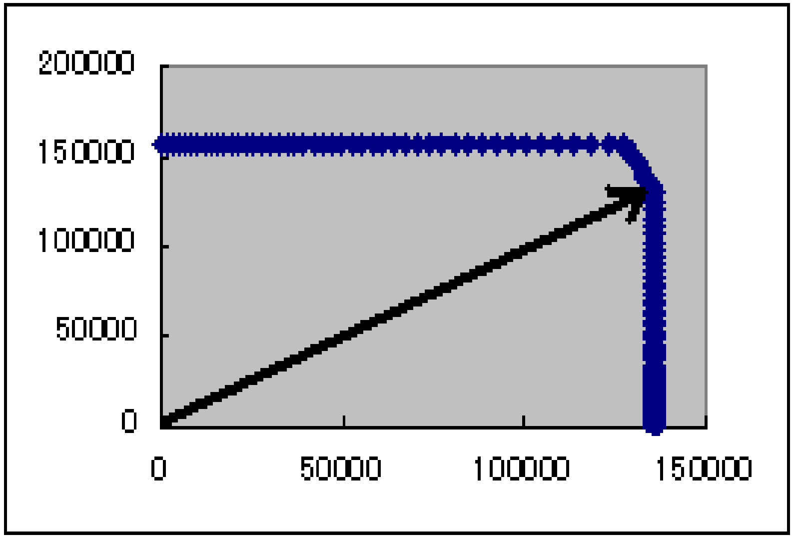
◎：効果的な拡大方向が２つ以上あるもの

5.数値実験（5）

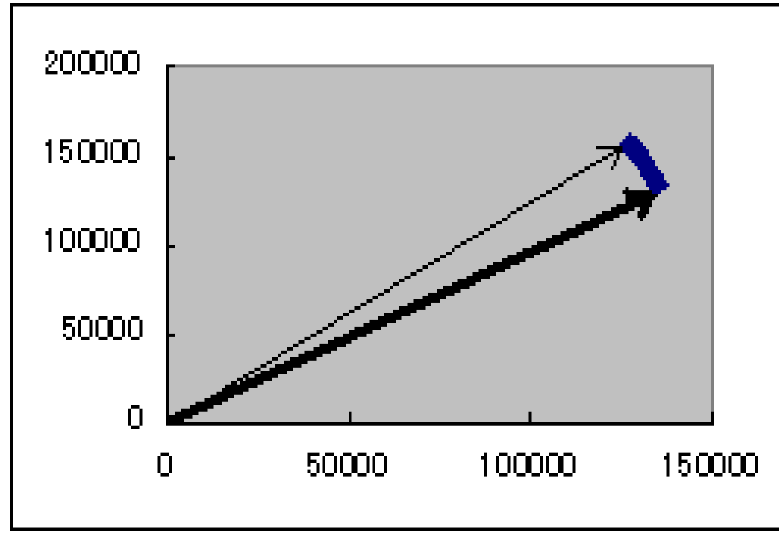
縦軸：出力2　横軸：出力1

H2（CCRモデル）

$\alpha = 0.510$

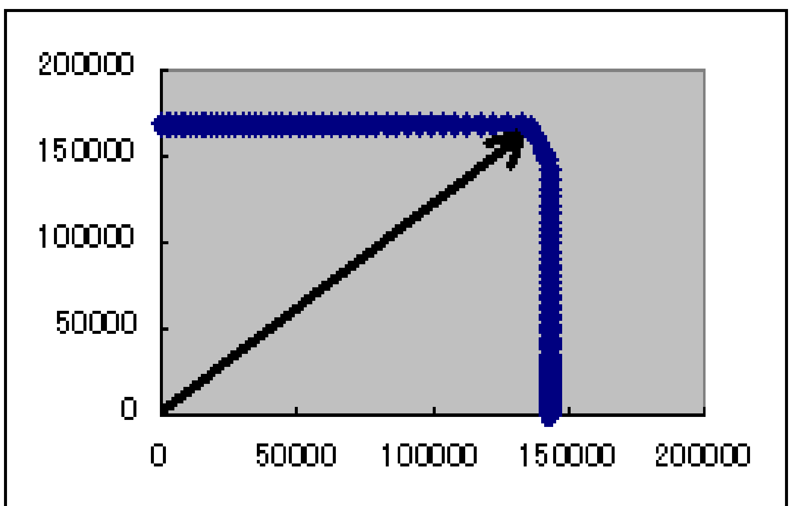


α=0.45~0.50

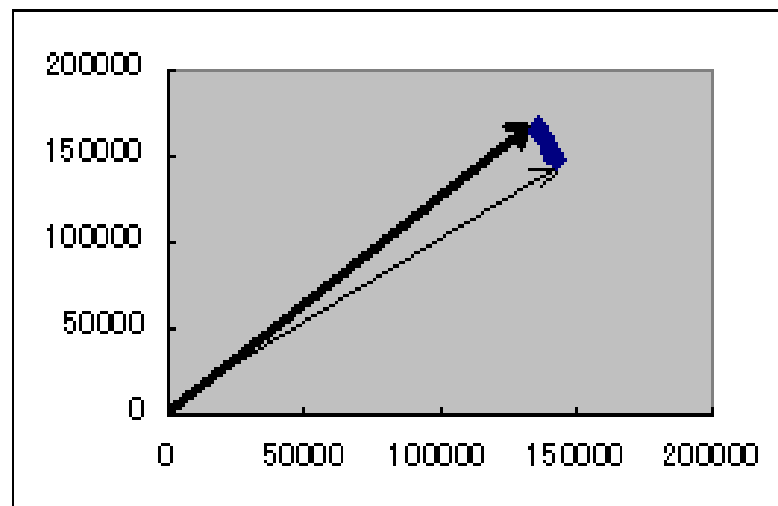


H3（CCRモデル）

$\alpha = 0.442$



α=0.45~0.49

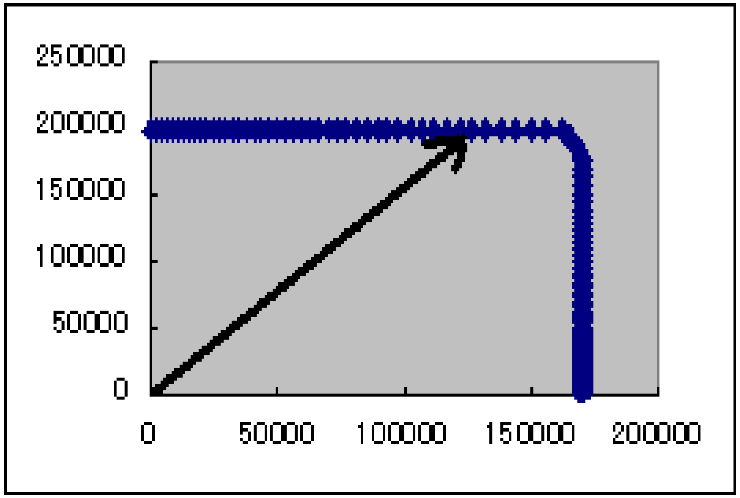


5.数値実験(6)

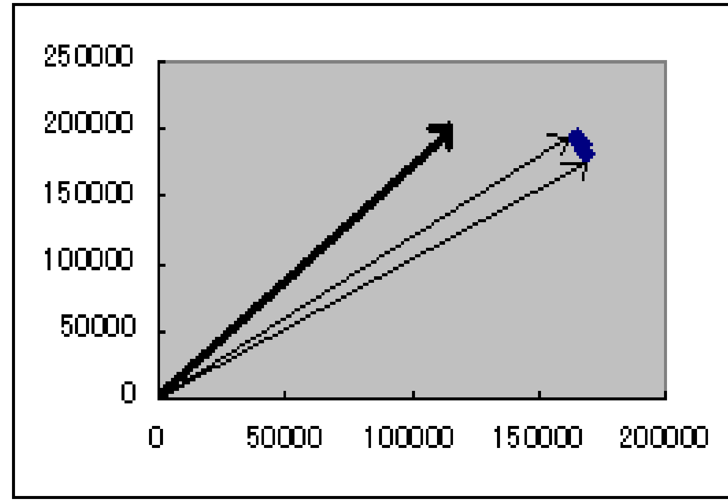
縦軸:出力2　横軸:出力1

H7(CCRモデル)

$\alpha = 0.372$

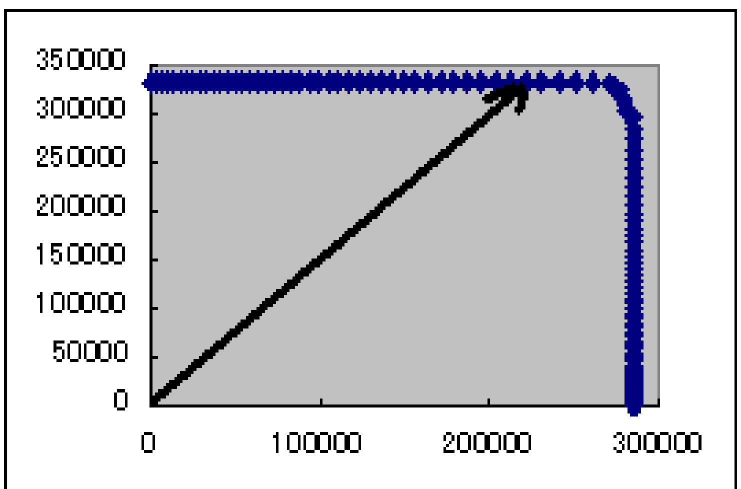


$\alpha = 0.46 \sim 0.48$

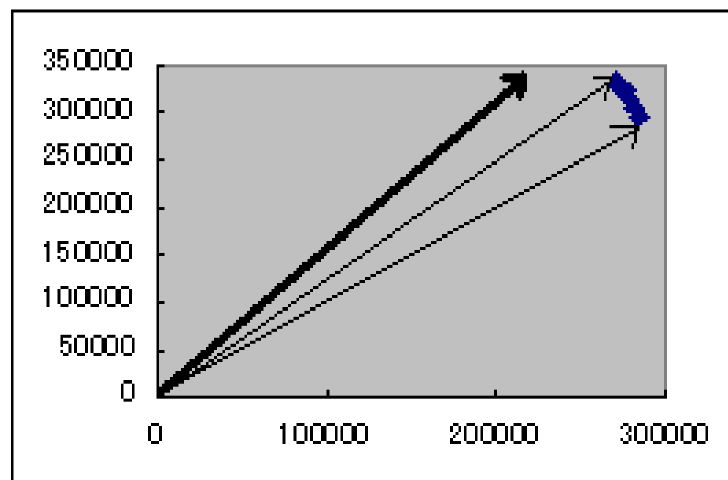


H12(CCRモデル)

$\alpha = 0.388$



$\alpha = 0.45 \sim 0.49$

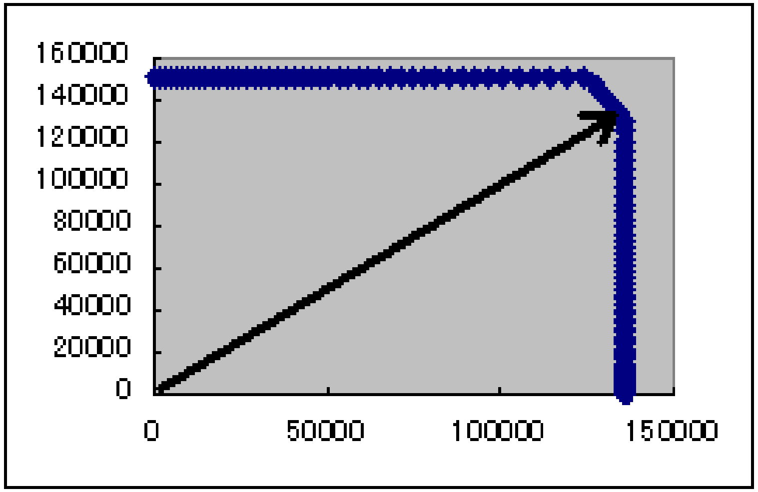


5.数値実験(7)

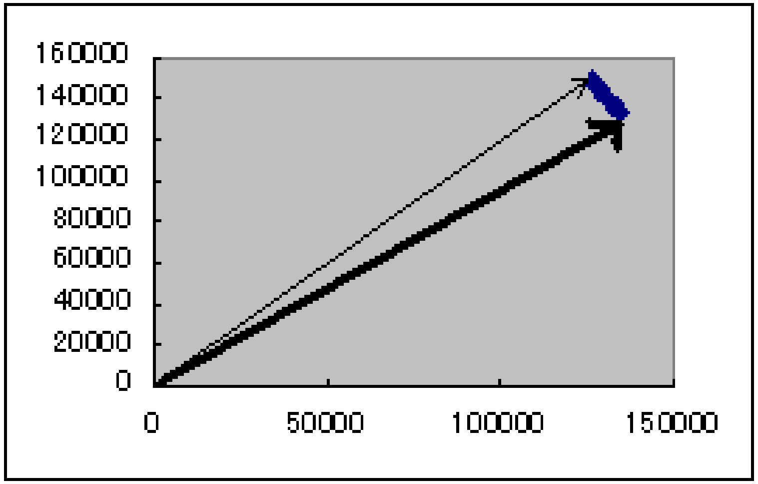
縦軸:出力2　横軸:出力1

H2(BCCモデル)

$\alpha = 0.510$

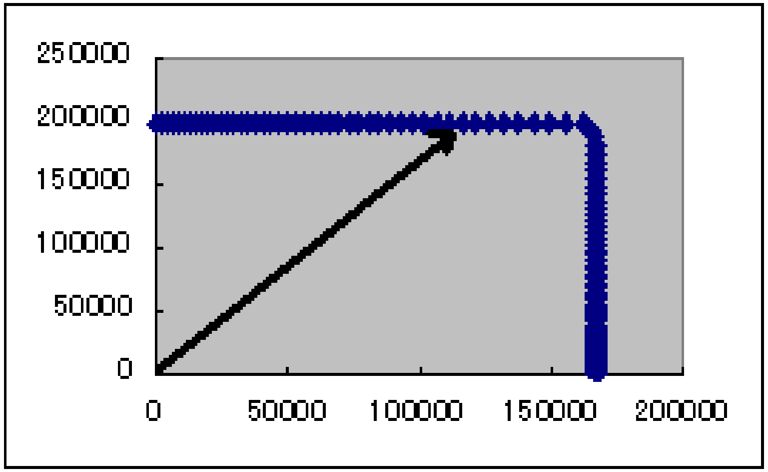


$\alpha = 0.46 \sim 0.50$

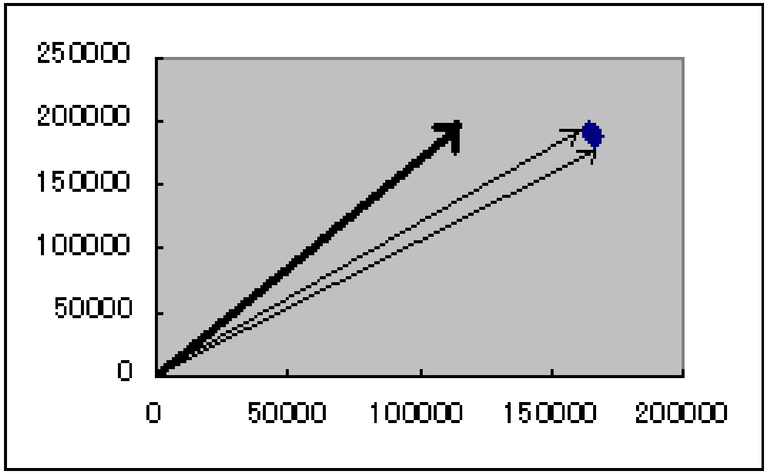


H7(BCCモデル)

$\alpha = 0.372$



$\alpha = 0.46 \sim 0.47$



6.まとめ

<u>２入力2出力の問題に対して</u>

↓

新しいモデルを提案

↓

固定された入力値に対応する

●効率的フロンティアの情報

●効果的な出力拡大方向

→ 知ることができた

効率的フロンティアの全容の把握	→ 実現していない

7. 参考文献

[1]刀根　薫:「経営効率性の測定と改善-包絡分析法による-」
日科技連出版社（１９９３）

[2]横田　敏弘:「施策、方針の効果をDEAに基づき判定する方法について」
東京理科大学大学院工学研究科経営工学専攻修士論文(1998)

[3]今野　浩:「線形計画法」日科技連出版社(1987)

[4]村上　宣寛:「やさしいDelphi」日刊工業新聞社(1997)