共通費用の公平な分配の方法についての考察
— DEAによるアプローチ —

宮本　一典　（沼田　一道　助教授）

1．はじめに

同種の活動を行う複数の事業体全体に産出の増加をもたらすような投入で，その費用を各事業体に明確に対応付けられないものを共通費用と呼ぶ．例えば，銀行が数多くの現金自動支払機などを設置する時に各支店が分担する費用や，外食チェーンレストランのキャンペーン費用などである．共通費用を分配する方法はこれまで様々な研究が行われている[1]．本研究では，多入力多出力システムの効率性を相対的かつ総合的に評価する手法であるDEA (Data Enveloped Analysis) [2]を用いて分配する方法[3]を取り上げる．

[3]では共通費用を分配するために各事業体間での相対的な効率値の不変性，分配された共通費用の重み付けが0となることを禁ずる均衡条件 (Input Pareto-Minimality) を用いて配分を行っているが，「効率的な事業体の数－1」だけの自由度が残る．そのため，領域限定法を用いて効率的な事業体を一つに絞り込む．しかし，入出力数が大きくなると計算が煩雑になるうえ，共通費用の分配において領域限定法を用いる必然性もない．そこで，本研究では領域限定法を用いずに公平性の概念を併用して共通費用を分配する方法を提案する．

2．共通費用の分配

本研究では各事業体に共通費用を公平に分配する方法を提案することを目標とする．本研究における公平な分配とは，共通費用が分配される前と後で，他の事業体と比べた時の相対的経営効率が変らないことであると考える．つまり，共通費用を各事業体に分配したら経営効率の悪かった事業体の経営効率が良くなったり，経営効率の良かった事業体の経営効率が悪くなったりしてしまうような事がないようにする事である．特定の事業体を，優遇したり冷遇したりする事は全ての事業体にとって公平ではないからである．まず，各事業体の経営効率を評価することが必要になる．そこで各事業体の経営効率を評価するためにＤＥＡを用いる．

3．ＤＥＡの効率

DEAは，多入力多出力システムの相対的効率分析のための評価方法である．DEAでは分析対象をDMU (Decision Making Unit) と呼び，各DMUは複数の入力から複数の出力を産出していると仮定する．以下のように記号を定義する．

i ：入力項目の添え字　　n：ＤＭＵの総数　　x：ＤＭＵの入力値
j ：ＤＭＵの番号を示す添え字　m：入力の項目数　　y：ＤＭＵの出力値
k ：出力項目の添え字　s：出力の項目数　v：入力にかかる重み　u ：出力にかかる重み

入力データ，出力データそれぞれに重みをかけて加えることによって，それぞれ一つの仮想的入力，仮想的出力に換算する．そして分数計画問題によって「仮想的出力/仮想的入力」の比率を１以下に抑えたうえで，測定対象DMUのこの比率θを最大化するような重み(v,u)を求める問題を解く．この重みは対象とするDMU毎に異なる値をとり，そのDMUにとって最も都合の良いように決められる．この分数計画問題の最適値θ^*を当該DMUの効率値と定義し，$\theta^*=1$の時Ｄ効率的，$\theta^*<1$

の時非効率的という．この分数計画問題は，目的関数の分子を1に固定し，分母を最小化する線形計画問題に書き換える事ができる．

4．DEAを用いた公平な分配

共通費用を非効率的 DMU のみに分配し，対応する重みを0にしてしまえば，共通費用の分配前後で相対的な効率値は不変である．しかし，この方法では分配の仕方が一定に定まらないし，全ての DMU にとって公平であるとは言えない．そこで各 DMU のどれかで，少しでも共通費用の配分割合を変えると相対的な効率値が変化してしまうような均衡条件（Input Pareto-Minimality）を導入する．1入力1出力の場合，この条件から導かれる共通費用の配分は各DMUの入力値による比例配分である．Input pareto-Minimality は，分配された共通費用に対応する重みが0となることを禁ずるものと理解することができる．

多入力多出力の場合，Input Pareto-Minimality は（共通費用分配前に）非効率的 DMU_o の効率値を計算した線形計画問題のシャドウプライス（効率値を与える基底解に対応するシンプレックス乗数）$(\lambda_1^{jo},\lambda_2^{jo},...,\lambda_n^{jo}$，$j_o \in \overline{J}_e$: **非効率的DMUの集合**$)$ を用いた連立方程式の形で与えられる．各 DMU への共通費用の配分を $(r_1, r_2,..., r_n)$ とすると，共通費用配分後の DMU_{jo} の効率値を計算する線形計画問題は次にようになる．

$$
\langle P1 \rangle \begin{cases} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} v_{ijo} x_{ijo} + w_{jo} r_{jo} & (1) \\ \text{sub. to} & \displaystyle\sum_{k=1}^{s} u_{kjo} y_{kjo} = 1 & (2) \\ & \displaystyle -\sum_{k=1}^{s} u_{kjo} y_{kj} + \sum_{i=1}^{m} v_{ijo} x_{ij} + w_{jo} r_j \geq 0, \quad j = 1,.., n \quad v_{ijo},\ u_{kjo} \geq 0 & (3) \end{cases}
$$

w_{jo} は DMU_{jo} に割当てられる共通費用のウェイトである．シンプレックス乗数 $(\lambda_1^{jo},\lambda_2^{jo},...,\lambda_n^{jo})$ に対応する〈P1〉の基底解において w_{jo} が非基底変数であれば，目的関数値すなわち効率値は不変である。このためには，

$$
r_{jo} \geq \sum_{j=J_e} u_j^{jo} r_j \qquad j_o \in \overline{J_e} \qquad J_e: \text{効率的}\, DMU \,\text{全体の集合} \tag{4}
$$

が成立しなければならない．しかし(4)で左辺＞右辺だと重み w_{jo} が0となってしまい，Input Pareto-Minimality の条件に反する．そこで、

$$
r_{jo} = \sum_{j=J_e} u_j^{jo} r_j \qquad j_o \in \overline{J_e} \qquad J_e: \text{効率的}\, DMU \,\text{全体の集合} \tag{5}
$$

を課す．これが Input Pareto-Minimality を規定する連立方程式である．ここで，効率的 DMU がただ一つだけの場合には連立方程式は（$\sum r_j = 1$ と合わせて）一意に解け，共通費用の分配の仕方は唯一に決まる．しかし，効率的な DMU が複数ある場合には方程式は不定となり（$|J_e|$-1 個の自由度が残る）分配の仕方が唯一に決まらない．[3]では領域限定法を用いて効率的な DMU を一つに絞り込み，自由度を解消している．

5．提案する方法

領域限定法は(6)(7)により各DMUの各入出力項目の重みv, uの取りえる比を$c(c:1)$以内に抑えるものである．

$$\frac{1}{c} \le u_i / u_t \le c \qquad i, t = 1, \cdots, s \tag{6}$$

$$\frac{1}{c} \le v_k / v_l \le c \qquad k, l = 1, \cdots, m \tag{7}$$

(6)，(7)のcを徐々に小さくしていき1に近づけると効率的DMUの数は減少する．しかし，この方法では効率的なDMUが1つに絞り込まれるまで繰り返し線形計画問題を解かなければならないので煩雑である．

以下では領域限定法を用いずに$|J_e|-1$個分の自由度を解消する方法を提案する．

提案1： 最も多く割り当てられるDMUの共通費用を最小にするという公平性を用いることで，自由度を解消する方法である．全てのDMUで少しずつ分担する事によって，最も多く割り当てられるDMUの共通費用を少なくしようという「悪」平等とも考えられる方法である．

$$\langle P2 \rangle \left\{ \begin{array}{lll} \min & \mu & (8) \\ \text{sub. to} & r_{j_o} = \sum_{j=J_e} u_j^* r_j \quad , \quad j_o \in \overline{J}_e & (9) \\ & \sum_{j=1}^{n} r_j = 1 & (10) \\ & 0 \le r_j \le \mu \quad , \quad (j = 1,2,.., n) & (11) \end{array} \right.$$

この提案1では，計算が煩雑で，公平性という観点から特に必然性が無かった領域限定法を排し，各DMUの相対的な効率値の不変性という[3]で示された公平性に加えて、さらに平等性という概念も導入している．

提案2： 1入力1出力の場合、入力値の比例配分によって共通費用を分配すれば，相対的な効率値は不変であった．そこで効率的なDMUの間でだけは各DMUの入力値の相加(相乗)平均により比例配分する．これにより，効率的なDMU間の配分の比率が決定できる．効率的なDMU間の配分の比率が決まってしまえば，各DMUの配分はInput Pareto-Minimalityの連立方程式によって一意に決まる．この提案は自由度を解消するために，効率的なDMU間でのみ共通費用を入力値で比例配分するものである．非効率的DMU間の配分はInput Pareto-Minimalityを用いて決める．

6．実験および考察

表1に示した[3]の数値例を用いて実験を行った．また，全てのDMUに割り当てられる共通費用の総額を1000として領域限定法、提案1、提案2をそれぞれ用いて分配した共通費用を表2に示す．

領域限定法を用いた[3]では、一番少なく割り当てられているのはDMU4であり、一番多く割り当てられているのはDMU10とDMU12で、同じ額の費用が割り当てられている。この2つのDMUは経営効率は異なるが、入力値が全く同じであるためである．

提案1は，「平等」の概念を導入しているので，各DMU間で割り当てられる共通費用の格差は小さい．一番少なく割り当てられているのはDMU9，DMU11で，同じ額となった．また一番多く割り当てられているのはDMU2，DMU3，DMU7，DMU8，DMU12で，5つのDMUとも割り当てられる額が同じとなった．

相加平均を用いた提案２では，一番少なく割り当てられているのは DMU4 で，一番多く割り当てられているのは DMU12 となった．相乗平均を用いた提案２では，一番少なく割り当てられているのは DMU5 で，一番多く割り当てられているのは DMU12 となった．相加/相乗平均の２つを用いた提案２と領域限定法を用いた[3]との３つを比較すると，DMU2，DMU4，DMU7，DMU10，DMU12 において，相加平均を用いたほうが相乗平均を用いたよりも領域限定法を用いた[3]の値に近くなった．また相加平均を用いた提案２と領域限定法を用いた[3]は最も多く割り当てられる DMU，最も少なく割り当てられる DMU ともに一致した．

表１　[3]の数値例

DMU	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
入力1	350	298	422	281	301	360	540	276	323	444	323	444
入力2	39	26	31	16	16	29	18	33	25	64	25	64
入力3	9	8	7	9	6	17	10	5	5	6	5	6
出力1	67	73	75	70	75	83	72	78	75	74	25	104
出力2	751	611	584	665	445	1070	457	590	1074	1072	350	1199
効率値	0.756	0.923	0.747	1.000	1.000	0.962	0.861	1.000	1.000	0.832	0.333	1.000

７．まとめ

本研究では，DEA を用いて共通費用を配分する新しい方法[3]が，配分の自由度を解消するために用いている領域限定法（DMU 数や入出力の項目数が大きくなると計算が煩雑になる）の代わりに，平等性（提案1），平均入力の比（提案 2）を用いて自由度を解消する方法を提案した．本研究で提案した方法の中で，相加平均を用いた提案２が領域限定法を用いた[3]の値に最も近い値となった．相加平均を用いた提案２は，今回の実験結果から領域限定法を用いた[3]と大きな差がないと言える．また，提案１では 12 個中，５つの DMU で同じ額になるなど，各 DMU に割り当てられる共通費用の格差が小さいという意味では，最も公平であるとも言える．しかし，今回の数値例が DMU12 個で３入力２出力という比較的小さな例であり，現実に即した問題ではなかった．現実的な規模の，実際に即した問題を扱い，どの方法が最も良い方法であるかを検討する必要があると思われるが，それは今後の課題である．

表２　実験結果

DMU	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
領域限定法[3]	85.02	72.19	99.73	59.91	61.95	87.21	94.80	67.03	78.22	107.86	78.22	107.86
提案1	89.00	92.72	92.72	81.13	82.60	80.05	92.72	92.72	63.64	76.36	63.64	92.72
提案 2(相加平均)	85.98	73.26	101.70	67.65	71.41	87.38	79.81	69.42	78.04	93.65	78.04	113.64
提案 2(相乗平均)	87.46	80.35	96.65	74.10	66.23	85.87	75.61	77.08	74.05	88.86	74.05	119.69

[参考文献]

[1]岡本　清：原価計算（四訂版），国元書房，1990.

[2]刀根　薫：経営効率性の測定と改善－包絡分析法ＤＥＡによる－，日科技連，1993.

[3]Wade D.Cook，Moshe Kress：Characterizing an equitable allocation of shared costs，A DEA approach，*European Journal of Operational Research*，Vol.119，652 - 661，1999.