シュタイナー問題に対する近似解法の研究

仲井　義統　（　沼田一道　助教授　）

1. はじめに

地理的に離れた複数都市間に新たな通信回線を敷設したり，いくつかの地域をパイプラインで結ぶなどという場合，出来るだけ総距離の短い線路で，対象地点全体を連結したいという要求が生ずる．これを「平面上に配置された点にそれらの間を結ぶ直線（線分）を付加して全体を連結グラフにする」と考えれば．これは最小全域木を求める問題となり，標準的な解法で能率よく最適解を求めることが出来る．しかし,「線分の他に点を付け加えることも許して，付加線分の合計長を最小化する」と考えると，これはシュタイナー問題と呼ばれるものになる．一般に，与えられた同一点集合に対しシュタイナー問題の解のほうが最小全域木より付加線分の合計長は小さい．本研究ではシュタイナー問題を取り上げる．

シュタイナー問題については，トリチェリ-カバリエリ [1]，メルザク [2] らによる厳密解法が知られているが，点数 30 以上の問題は実行不能といわれている．シュタイナー問題は NP 困難な問題のクラスに属するが，その計算量は（その中でも）極めて大きいと考えられている．一方，幾何的条件から離れ，抽象的に 2 種類の点–必須点とシュタイナー候補点– とそれらの間の距離を与えられてシュタイナー木を求める，グラフ的シュタイナー問題もよく知られている．グラフ的シュタイナー問題も依然として NP 困難な問題であるが,（幾何的な）シュタイナー問題よりは解き易いと考えられる．

本研究では，グラフ的シュタイナー問題の考え方を適用することによりシュタイナー問題を短時間で近似的に解く可能性を検討する．つまり，幾何的シュタイナー問題に対して，あらかじめシュタイナー候補点を平面上の格子点で与えることにより，シュタイナー点を求める際にかかる計算量の大幅な短縮を図るというのが基本的着想である．このようにして通常の（NP 困難な）組合せ最適化問題となった「格子点シュタイナー問題」に対して，メタ戦略を含む近似解法の構築と数値実験を行ない，得られる解の精度や計算時間について考察する．

2. シュタイナー問題

シュタイナー問題とは「平面上に与えられた点全体を，新たに点を付け加えることを許した上で，点同士を直線で結んで連結グラフにするとき，直線の総長が最小となる仕方を求める」ものである．最適解として得られる点と直線は木になるので，シュタイナー木問題とも呼ばれる．最初から与えられている点を必須点，新たに付け加える点をシュタイナー点と呼ぶ．

図 1. 同一点集合に対する全域木とシュタイナー木

シュタイナー問題は，トリチェリ-カバリエリの作図法と メルザクのアルゴリズムを用いることにより厳密に解くことが出来る．

[トリチェリ-カバリエリの作図法]

このアルゴリズムは三点と新たな点 S とを結ぶ距離の総和が最小になるように，S の位置を決定するシュタイナー問題の特殊な場合についての解法である．彼らは,「点 S における角が全

て 120° 以上になるとき，距離の総和が最小になる」ことを示し，それをを利用して，点 S を求める作図法を与えている．3 点 A，B，C が与えられたときの手順を以下に示す．

1. 適当な 2 点 (A,B とする) を選び，直線 AB を 1 辺とする正三角形を点 C の反対側に作る．
2. 正三角形の第三頂点を代替点 (I) とし，外接円を描く..
3. 代替点から残りの点 C に向かって直線を引くと，直線と外接円の交点がシュタイナー点 (S) となる．

代替点とは $AS + BS = IS$ となる点で，A,B 2 点を I に置き換えてもグラフの総長が変わらないためこう呼ばれる．4 点以上の問題に対しては，代替点を繰返し用いることで問題のサイズを小さくしていき，3 点問題に帰着させる．

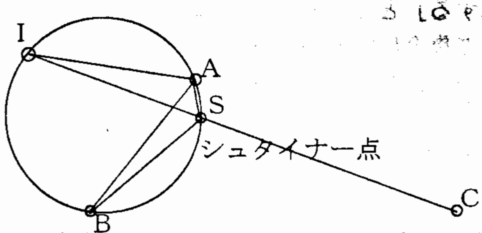

図 2. 三点問題におけるシュタイナー点

[メルザクのアルゴリズム]

これは作図法により求まるシュタイナー点，代替点を利用してシュタイナー木を網羅的に列挙して、その中から最短シュタイナー木を求めるアルゴリズムである．以下にその手順を示す

1. まず，与えられた頂点集合を共有部分を持つような部分集合に分ける．
2. 各部分集合ごとに部分最小シュタイナー木を求める．(代替点置換操作を点のすべての順番について行なって最小のものを選ぶ)
3. 共通部分を用いて各部分シュタイナー木を繋げる．
4. 1 に戻り，全部分集合パターンを行うまで繰り返す．
5. 得られた解のうち最小のものを解とする．

メルザクのアルゴリズムの計算量は組合せ数の積になっており，頂点数が増えるに連れて極めて急速に増加する．高速なコンピューターを使用しても，頂点数 29 までしか解けないと言われている [2]．ここにおいて，幾何的シュタイナー問題に対し，“最適解に近いコストをもつ木”を見いだす近似的方法の構築が重要な課題となる．

3. グラフ的シュタイナー問題

グラフ的シュタイナー問題とは「必ず使用・連結すべき必須点とシュタイナー点として利用できる（使わなくても良い）候補点の 2 種類の点集合，および それらの各点間の枝（とその長さ）が与えられたもとで，必須点と幾つかのシュタイナー候補点間を結んで（枝を選んで）全体を連結グラフとするとき，使用する枝の総長が最小となるものを求める」ものである．様々な定式化が存在するが，ここでは近似解法との関連を考慮し，最小全域木を用いて記述する．以下では，$cost\_SpanTree(V)$ で点集合 V を張る最小木の総枝長を表わす．Z を必須点の集合，S を候補点の集合とする．X は S の部分集合で，シュタイナー点集合（解候補）である．

$$\text{(GSTP)}\left|\begin{array}{ll}\text{minimize} & cost\_SpanTree(Z \cup X)\\ \text{subject to} & X \subset S\end{array}\right.$$

4. 提案する近似解法

本研究ではこのグラフ的シュタイナー問題における考え方をシュタイナー問題に適用することにより，近似的にシュタイナー問題を解いていく．つまり，与えられたシュタイナー問題に対しあらかじめ平面上にシュタイナー候補点を設けておき，必須点と任意のシュタイナー候補点で最小全域木を構成し，全経路の総長の短縮を図る．シュタイナー候補点を決定する際において，平面上に等間隔の網目をはり，その各格子点をシュタイナー候補点として用いる．網目は必須頂点集合のX座標Y座標の最大，最小値を境界とした四角形の中に張るものとし，その格子点数をnとする．集合Xはn次元0-1ベクトル$\boldsymbol{x}$で表される．すなわち，$X = \{i|x_i = 1, i = 1, 2, \cdots n\}$. $\boldsymbol{x}$を一つ決めるとZとXを張る最小木が一つ決まる．これを$U(T(\boldsymbol{x}))$と書く．$T(\boldsymbol{x})$の近傍を$U(T(\boldsymbol{x})) = \{T(\boldsymbol{x}')| \quad d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \leq 1\}$により定義する．ただし$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i'|$である．0-1ベクトル$\boldsymbol{x}$をランダムに発生させ，対応する$T(\boldsymbol{x})$から出発して，$U(T(\boldsymbol{x}))$を近傍とする局所探索を行う．$T(\boldsymbol{x})$を求めるのには次のPrimのアルゴリズムを利用する．

[Primのアルゴリズム　$\{G = (V, E)$の最小全域木Tを求める$\}$]

部分最小全域木$ST = (W, F)$を成長させてTを求める．最初は$ST \equiv (W, F) = (\{$最初の頂点$\}, \phi)$から出発．$\overline{i^*j^*}$(W内の点から一番近い$\overline{W}$内の点への枝 $\in E$)を求めて，$ST \equiv (U, F) := (W \cup \{j^*\}, F \cup \{\overline{i^*j^*}\})$とする．$W = V$となれば終了．

[提案するアルゴリズム]

1. 必須頂点集合Zの入力；　Zに応じて網目を張り，シュタイナー候補点を生成する．
2. minCOST $\leftarrow \infty$；　$\boldsymbol{x}(X)$をランダムに発生させる．
3. $U(T(\boldsymbol{x}))$の中でコストが最小の$T(\boldsymbol{x}')$を探す．
4. $\mathrm{cost}(T(\boldsymbol{x}')) <$ minCOST なら
   minCOST$\leftarrow \mathrm{cost}T(\boldsymbol{x}'), \boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{x}'$，$T^* \leftarrow T(\boldsymbol{x}')$として5へ戻る．
5. 終了．T^*とminCOSTと出力．

5. 実験

与えられた頂点数をmを変えながら，近似シュタイナー木を求める際に

・方法1　初期点として$\boldsymbol{x} = (0, 0, \cdots 0)$から出発する

・方法2　$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = m - 2$のランダムな$\boldsymbol{x}$（$|X| = m - 2$）から出発する

という2つの方法をプログラムで作成し．以下の2つ実験を行った．なお，方法2はランダムな初期解から出発するので，1つの問題につき，10回の試行を行い，一番良い解を採用した．プログラムはBorland社の*Delphi*5を用いて作成した．

実験[1]　方法1，方法2を行いコストの違いや，実行時間について分析を行う．

実験[2]　格子点の幅を小さくしていき，コストの変化を調べる．

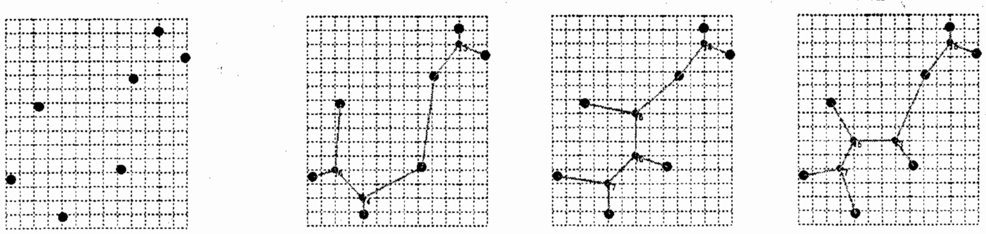

図3. 問題例と近似解例

6. 結果と考察

[実験結果] 頂点数が少なく範囲が狭い場合，方法2は時間をかける割には方法1と同じか，わずかに良い解しか得られないことが多かった．しかし，頂点の存在範囲が広がるにつれ，方法2の方で良い解が得られた．特に，本州の県庁所在地を頂点としたグラフでは明らかな違いが現れた．しかし，コストを出すまで方法1に比べると非常に時間がかかるものであった．メッシュを細かくすると良い結果が得られたが，時間がかかる割にコストの変化は少なかった．得られるシュタイナー木の構造にもあまり違いはなかった．

表1. 実験結果

必須頂点数	最小全域木コスト	方法1コスト	方法2コスト
7	286.515	279.001	278.979
15	564.680	551.916	551.916
本州 34	763.562427	739.8114553	736.9553135

[考察] 実験の結果，格子点シュタイナー問題の（近似）解は，最小全域木よりも明らかに良い解を与えるので，格子点シュタイナー問題を考える意義はあると思われる．方法1では，最小全域木より良い解が短時間で求まるので，規模の小さな問題では利用価値が高いかもしれない．しかし規模が大きくなると，方法2では1よりも良い解が求まるだけでなく，違った位置のシュタイナー候補点を採用していたため，方法1の精度には問題を感じる．方法2では X を付加した際に初期頂点数が2倍近くになるため，サイズが大きくなるに連れて，方法1に比べると多大な時間がかかった反面，様々な形の近似解が得られた．方法2ではランダムに加える頂点 X を $n-2$ としたが，少し多すぎるように思われた．$|Z| = 50$ の問題例で，初期 X の要素数は48であるが，実際に追加したシュタイナー点は最大でも16であった．もっとも，これは実験で使用したデータの広がり具合にもよると思われる．また，Z を広範囲にとった問題例は，格子点の数が多くなり計算時間は大きくなる．

格子点シュタイナー問題の場合，厳密なシュタイナー点の位置は求まらないが，求まったシュタイナー木から，どのような系列の代替点操作に対応しているかを特定することが出来るため，それらの頂点に対し，代替点操作を行うことによって，メッシュを小さくするよりは少ない時間で良い近似解（コスト）を得ることが出来そうに思われる．

7. 今後の課題

本研究では幾何的シュタイナー問題に対して，シュタイナー候補点を格子点で与えておくことにより，グラフィカルシュタイナー問題の考え方を適用して解く方法を試みた．実験の結果，候補点を格子点で与えておくことにより頂点数が30をこえても最小全域木よりもコストの良い解を短時間で得ることが出来たため，あらかじめ候補点を与えておき，最小全域木の近傍探索を行うことは有効であることが分かった．

シュタイナー候補点を格子点で与えるのでは，頂点数だけでなく範囲が広がるだけでも，計算時間がかかってしまうので，限界があるように思われる．提案した方法をより高速化するよりも，幾何的シュタイナー問題に対する厳密解法の代替点操作を近似的に探索する方法が有望と思われるが，これは今後の課題である．

参考文献

[1]M.W. ベルン，R.L. グラハム：最短ネットワーク問題，サイエンス(日経サイエンス社)，19巻3号，84-91，1989.

[2]Z.A.Melzak : On the problem of Steiner, *Canad.Math.Bull.*, Vol.4, 143-148, 1961.