DEAの生産可能領域に基づく新しい効率性尺度の検討

勝呂　方紀（沼田一道　助教授）

1．はじめに

経済環境の悪化に伴い企業の経営効率性の見直しは重要な課題となっている．DEA（Data Envelopment Analysis）は公共機関から民間企業に至るさまざまな事業体の効率を現存する企業体の活動に基づいて相対的に評価するための手法である．DEAでは効率的な活動を行う事業体を特定するのと同時に非効率的な事業体の改善案を具体的に示すことができる．しかしDEAには改善の一律性という問題がある．この問題を克服すべく，いわゆるGEM(Global Efficiency Measure)と呼ばれる一連の効率性評価法が開発されている．その中には効率性尺度の満たすべき理想的な性質を掲げて公理的にアプローチしたRIM(Russell Input Measure)，ROM(Russell Output Measure)がある．また，両者を同時に考慮したRGM(Russell Graph Measure)などがある．これらはDEAと同じ生産可能領域を仮定するが，一律改善ではないので，DEAでの効率的／非効率的の分類とは一致しない．最近J.T.Pastor【2】らはRGMをもとに計算の複雑さと解釈の難しさを避けたERM(Enhanced Russell Measure)を提案した．本研究ではERMをもとに入出力の重みを指定して，実施のし易さを考慮した効率値(改善案)を与えるERMの変形版<NERM>を提案し，その性質を検討する．

2．DEA【1】

DEAでは，評価対象である事業体をDMU(Decision Making Unit)と呼び，すべてのDMU(n個)は同じ環境のもとで複数種類の入力から複数種類の出力を産出していると仮定する．ここで，各DMUのm個の投入項目を$x_{1j},x_{2j},\cdots,x_{mj}$，$s$個の産出項目を$y_{1j},y_{2j},\cdots,y_{sj}$とする$(j=1,\cdots,n)$．対象とするDMUをDMU$_o$として，その入出力値にウエイトを乗じて仮想的入出力

仮想的入力：$v_1x_{1o}+v_2x_{2o}+\cdots+v_mx_{mo}$　　入力につけるウエイト：$v_i(i=1,\cdots,m)$

仮想的出力：$u_1y_{1o}+u_2y_{2o}+\cdots+u_sy_{so}$　　出力につけるウエイト：$u_r(r=1,\cdots,s)$

を作り，その比率尺度

$$\frac{\text{仮想的出力}}{\text{仮想的入力}}=\frac{u_1y_{1o}+u_2y_{2o}+\cdots+u_sy_{so}}{v_1x_{1o}+v_2x_{2o}+\cdots+v_mx_{mo}}$$

をもとに効率値を計算する．このときすべてのDMUの比率を1以下に制限した上で，分析対象の比率を最大にするようなウエイトを求め，そのウエイトを用いて計算した比率をDMU$_o$の効率値と定義する．この問題は分数計画問題であるが，目的関数の分母を1に固定することによって等価な線形計画問題<CCR$_o$>に書き換えることができる．

$$\langle\mathrm{CCR_o}\rangle\left\{\begin{array}{ll}\max & \displaystyle\sum_{r=1}^{s}u_ry_{ro}\\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}v_ix_{io}=1\\ & \displaystyle\sum_{r=1}^{s}u_ry_{rj}<\sum_{i=1}^{m}v_ix_{ij}\quad(j=1,\ldots,n)\\ & x_{ij},y_{ij},v_i,u_r\geq 0\end{array}\right.$$

$$\langle\mathrm{LP_o}\rangle\left\{\begin{array}{ll}\min & \theta\\ \text{s.t.} & \displaystyle\theta x_{io}-\sum_{j=1}^{n}\lambda_jx_{ij}\geq 0\quad(i=1,\cdots,m)\\ & \displaystyle y_{ro}-\sum_{j=1}^{n}\lambda_jy_{rj}\leq 0\quad(r=1,\cdots,s)\\ & \lambda_j\geq 0\quad(j=1,\cdots,n)\end{array}\right.$$

上述の定式化<CCR$_o$>は CCR モデルと呼ばれる．その双対問題は実数 θ とベクトル $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ を変数として<LP$_o$>のようになる． $\theta=1$ となる活動をD効率的と呼ぶ．ここで<LP$_o$>の制約式は活動 $(\theta x_{io},y_{ro})$ が，次の集合 P_{CCR} に属することを要求している．

$$P_{CCR}=\left\{(x_{ij},y_{rj})\middle| x_{ij}\geq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij},\ y_{rj}\leq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj},\ \lambda_j\geq 0\right\}$$

P_{CCR} は生産可能領域と呼ばれ，現存する DMU を基に仮想的 DMU の取りうる範囲を規定したものである．生産可能領域に基づく DEA の効率値計算は生産可能領域内で出力(入力)値を維持したまま入力(出力)値を一定の割合でどこまで縮小(拡大)できるのか，を計算することである．入力値を縮小する場合を「入力縮小モデル」，出力値を拡大する場合を「出力拡大モデル」と呼ぶ．さらに入力と出力を同時に扱う「加法モデル」と呼ばれるものもあるが，そのモデルでは効率値を直接提供しない．

3．Russell Graph Measure

Russell Graph Measure は DEA の生産可能領域の概念に基づき，多入力，多出力系において DEA の問題となっていた一律縮小(拡大)しかできない点を各入力(出力)項目ごとに縮小(拡大)できるようにしたものである．これによりスラックは完全に排除され，入力の余剰，出力の不足が正確に効率値に作用するようになる．つまり，DEA ではスラックがあっても効率値が 1 と評価されていたものが，1 未満の効率値を与えることができるようになった．

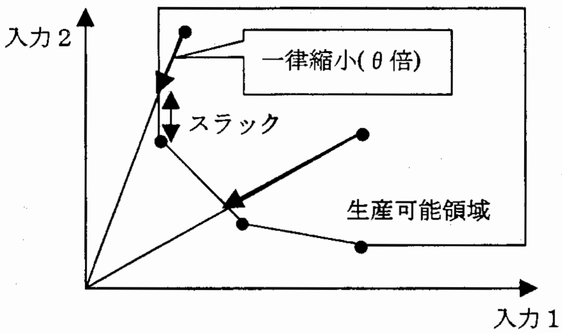

図1　入力縮小モデルでスラックが存在する場合

Russell Graph Measure は入力と出力を同時に考慮した上で，効率値を直接提供するものである．つまり，DEA における加法モデルと同様の発想であるが，加法モデルでは得られなかった効率値を直接求められるようにしたものである．Russell Graph Measure<RGM$_o$>は以下のように定式化される．

$$\langle \mathrm{RGM_o}\rangle\left\{\begin{array}{llll}\min & R_g(X_o,Y_o)=\dfrac{1}{m+s}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\theta_i+\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{\phi_r}\right) & & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}\leq\theta_i x_{io} & i=1,\cdots,m & \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}\leq\phi_r y_{ro} & r=1,\cdots,s & \\ & 0\leq\theta_i\leq 1, & \phi_r\geq 1 & \forall i,r, \\ & \lambda_j\geq 0, & j=1,\cdots,n & \end{array}\right.
\qquad
\langle \mathrm{ERM_o}\rangle\left\{\begin{array}{llll}\min & R_e(X_o,Y_o)=\dfrac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\phi_r} & & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}\leq\theta_i x_{io} & i=1,\cdots,m & \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}\leq\phi_r y_{ro} & r=1,\cdots,s & \\ & 0\leq\theta_i\leq 1, & \phi_r\geq 1 & \forall i,r, \\ & \lambda_j\geq 0, & j=1,\cdots,n & \end{array}\right.$$

しかし，この Russell Graph Measure は線形計画問題ではないので，計算が容易でない．また，

効率値が入力と出力を結合した形なので入力，出力がどのように効率値に影響を与えているかが解釈しにくい．その２点を改良すべく開発されたのが Enhanced Russell Measure＜ERM_o＞である．比率型の効率値によって改善案を入力，出力独立に考慮できる．＜ERM_o＞は以下のように変数を用いることによって線形計画問題に定式化される【2】.

$$
\langle ERM_{lp} \rangle
\begin{cases}
\min & \beta - \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\dfrac{t_{io}^-}{x_{io}} \\
\text{s.t.} & \beta + \dfrac{1}{s}\displaystyle\sum_{r=1}^{s}\dfrac{t_{ro}^+}{y_{ro}} = 1 \\
& -\beta x_{io} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\mu_j x_{ij} + t_{io}^- = 0 \qquad (i=1,\cdots,m) \\
& -\beta y_{ro} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\mu_j y_{rj} - t_{ro}^+ = 0 \qquad (r=1,\cdots,s) \\
& \beta \ge 0, \quad t_{io}^-, t_{ro}^+ \ge 0, \quad \forall i,r, \\
& \mu_j \ge 0, \quad j=1,\cdots,n
\end{cases}
\qquad
\left(
\begin{aligned}
\beta &= \left(1+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{y_{ro}(\phi-1)}{y_{ro}}\right)^{-1} \\
t_{io}^- &= \beta x_{io}(1-\theta_i), i=1,\cdots,m \\
t_{ro}^+ &= \beta y_{ro}(\phi_r-1), r=1,\cdots,s \\
\mu_j &= \beta\lambda_j, j=1,\cdots,n
\end{aligned}
\right)
$$

4．新しい効率性尺度の提案

効率値を計算し改善案を考えた時，入力と出力が同じように重要かつ改善を施しやすいとは言い切れない．その改善案の実現可能性の高低が問題となる．つまり，入力(出力)のほうが改善しやすいならば，入力(出力)を中心に改善する案がでるような効率性尺度が望ましい．そこで，入力と出力にウエイト付け$(0 \le \alpha \le 1)$することにより改善の優先度を重視し，各 DMU にとってそれぞれ改善しやすい案を発見することを考える．この効率性尺度＜NERM＞は Enhanced Russell Measure を基に線形計画問題として以下のように定式化できる．

$$
\langle NERM \rangle
\begin{cases}
\min & R_n(X_0,Y_0) = \alpha\left(\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\theta_i\right) + (1-\alpha)\left(-\dfrac{1}{s}\displaystyle\sum_{r=1}^{s}\phi_r\right) \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} \le \theta_i x_{i0}, \qquad i=1,\ldots,m, \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} \ge \phi_r y_{r0}, \qquad r=1,\ldots,s, \\
& 0 \le \theta_i \le 1, \quad \phi_r \ge 1 \quad \forall i,r, \\
& \lambda_j \ge 0, \quad j=1,\ldots,n. \\
& 0 \le \alpha \le 1
\end{cases}
$$

これを解いて得られた最適解を$(\hat{\theta}_i, \hat{\phi}_r)$として，＜NERM＞の効率値$R_i(0 \le R_i \le 1)$を以下のように定義する．

$$
R_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\hat{\theta}_i \Big/ \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\hat{\phi}_r
$$

5．数値実験

新しく提案した＜NERM＞の与える効率値を，＜ERM_o＞，＜CCR_o＞(入力縮小モデル)と比較して検討する．比較のために用いたデータは総合病院のデータ(２入力２出力で１４の DMU)【1】である．

表1．総合病院のデータ【1】

病院		H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10	H11	H12	H13	H14
入力1	医師	3008	3985	4324	3534	8836	5376	4982	4775	8046	8554	6147	8366	13479	21808
入力2	看護婦	20980	25643	26978	25361	40796	37562	33088	39122	42958	48955	45514	55140	68037	78302
出力1	外来	97775	135871	133655	46243	176661	182576	98880	136701	225138	257370	165274	203989	174270	322990
出力2	入院	101225	130580	168473	100407	245616	217615	167278	193393	256575	312877	227099	321623	341743	487539

6．結果および考察

NERMについては各DMUの代表としてH4でウエイトαを0.1刻みにして測定した．

表2．CCR, ERMの効率値と改善率

病院	CCR	ERM	CCR	ERM	ERM	ERM	ERM
	効率値	効率値	入力の縮小率	入力1の縮小率	入力2の縮小率	出力1の拡大率	出力2の拡大率
H1	0.9546	0.8906	0.9546	0.9571	0.9588	1	1.1513
H2	1	1	1	1	1	1	1
H3	1	1	1	1	1	1	1
H4	0.7018	0.4909	0.7018	0.7019	0.6834	1.8217	1
H5	0.827	0.7459	0.827	0.6626	0.8292	1	1
H6	1	1	1	1	1	1	1
H7	0.8442	0.7035	0.8442	0.8295	0.8726	1.4193	1
H8	1	1	1	1	1	1	1
H9	0.9946	0.9455	0.9946	0.891	1	1	1
H10	1	1	1	1	1	1	1
H11	0.9125	0.824	0.9125	0.9127	0.8613	1.1528	1
H12	0.9691	0.8432	0.9691	0.957	1	1.3209	1
H13	0.7859	0.5645	0.7859	0.6263	0.867	1.6453	1
H14	0.9742	0.7073	0.9742	0.6112	0.9742	1.2417	1

表3．NERMによる効率値

H4	ウエイト	効率値	優位集合	入力1の縮小率	入力2の縮小率	出力1の拡大率	出力2の拡大率
CCR		0.70183	H6,H8	0.70183	0.70183	1	1
ERM		0.49093	H6	0.70189	0.68338	1.82167	1
	$\alpha=0$	0.49094	H6	1	1	2.5954	1.4247
	$\alpha=0.1$	0.49094	H6	1	0.97362	2.5954	1.4247
	$\alpha=0.2$	0.49094	H6	1	0.97362	2.5954	1.4247
	$\alpha=0.3$	0.49094	H6	1	0.97362	2.5954	1.4247
	$\alpha=0.4$	0.49094	H6	1	0.97362	2.5954	1.4247
NERM	$\alpha=0.5$	0.49094	H6	1	0.97362	2.5954	1.4247
	$\alpha=0.6$	0.49094	H6	1	0.97362	2.5954	1.4247
	$\alpha=0.7$	0.49093	H6	0.70189	0.68337	1.8217	1
	$\alpha=0.8$	0.49093	H6	0.70189	0.68337	1.8217	1
	$\alpha=0.9$	0.50075	H3	0.72937	0.63412	1.7229	1
	$\alpha=1.0$	0.50075	H3	0.72937	0.63412	1	1

CCRモデルとは違いERM、NERMにはスラックが存在しない．また各入出力が一定改善ではないので全てのDMUにおいて効率値が厳しく見積もられている．これは，評価尺度として「非効率性の検出力」が強いと言えよう．表3よりNERMではウエイトαを任意に定めることによって改善案が変わり入出力どちらの項目重視で改善するか選ぶことができる．出力を重視すれば入力の縮小率は小さくなり入力を重視すれば出力の拡大率が小さくなる．また，NERMで一番改善量が多くなるウエイトαはERMと等しい効率値となる．つまり，ERMより実現可能性が高くなるような改善案を考えている分NERMは効率値が甘く評価される．

7．まとめ

NERMはERMと同様にDEAにおける改善の一律性，入力の余剰と出力の不足の軽視(考慮したとしても効率値に反映させられない)といった問題点を克服している．さらに改善案の実現可能性をも考慮しており，各DMUにとって最適な改善案を選ぶことができる可能性がある．しかし，実現可能性については技術的な面とマネジメントの面の両方から十分検討する必要がある．また，このモデルの妥当性を評価するにはもう少し大きい現実の問題に適用してみる必要があると思われるが，これは今後の課題である．

[参考文献]

【1】 刀根　薫：「経営効率性の測定と改善」，日科技連出版社，1993.

【2】 J.T.Pastor , J.L.Ruiz , I.Sirvent : An enhanced DEA Russell graph efficiency measure *European Journal of Operational Research*, 115, 596－607, 1999.