二次割当て問題に関する近似解法の研究

橋本　理一郎（沼田　一道　助教授）

1. はじめに

「ある集合の要素と別の集合の要素とを，最も望ましく組合せる」という課題は，生産や配送等の現場でよく出会う問題である．「望ましさ」の指標が要素の組合わせだけで決まる場合には，「割当て問題」と呼ばれ，厳密な最適解が能率良く求まる．しかし，工場や病院の部門を候補場所のどこに配置するかという問題や，キーボードのキーをどのように並べるかという問題は，望ましさの尺度が，配置する要素の関係の強さと，それらが置かれる場所間の距離（場所の近さ）の積の和（重み付き移動距離の総和）で与えられる．これらは二次割当て問題（Quadratic Assignment Problem，QAP）と呼ばれ，厳密な最適解を求めるには，全解の列挙が本質的に避けられないと考えられている問題（NP 困難な問題）の一つである．

要素（配置場所）数を n とするとき，割当て方は $n!$ 程度であるが，n が大きくなると $n!$ は爆発的に増大するので全解列挙は事実上不可能である．そこで，なるべく短い時間で満足のいく近似解を求めることが重要になる．近似解法としては，現在の解を少しずつ改善していく逐次改善法（局所探索法）が基本である．最近では，計算機の高速化によって生じた余裕時間を利用して逐次改善（局所探索）の精度を上げる様々なメタ戦略が提案・検討されている．

本研究では，比較的新しいメタ戦略である SimE（Simulated Evolution）をとりあげ，QAP のベンチマーク問題の一つであるキーボード割当て問題（$n = 26$）を解く．SimE は具合の悪い要素の変更を優先して行う戦略であるが，通常の近傍探索である First Move（近傍中の最初に見つかった改善解へ移る）や Best Move（近傍中の最良解に移る）と比較し，その効果を確認する．

2. 二次割当て問題

配置すべき要素の集合 N と配置場所（位置）の集合 M が与えられる．N の要素数を n，M の要素数を m として，$n \leqq m$ と仮定する（図１）．要素 i と j の関係の強さを C_{ij}，場所 p，q 間の距離を D_{pq} とし，0-1 決定変数 x_{ip}（x_{jq}）で要素 i（j）を場所 p（q）に配置する（1）か否（0）かを表わすと，要素間の関係の強さと配置された場所間の距離の積の和（重み付き移動距離の総和）を最小化する QAP は次のように定式化される．

$$
\text{(QAP)}\left\{
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & \text{Cost} = \displaystyle\sum_{i,j,p,q} C_{ij} \cdot D_{pq} \cdot x_{ip} \cdot x_{jq} \\
\text{Subject to} & \displaystyle\sum_{p} x_{ip} = 1 \quad (i = 1,\ 2 \cdots n) \\
 & \displaystyle\sum_{i} x_{ip} \leqq 1 \quad (p = 1,\ 2 \cdots m \\
 & x_{ip} \in \{0,\ 1\}
\end{array}
\right.
$$

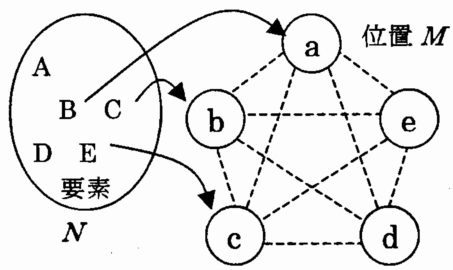

図１　二次割当て問題

以下（$x_{11} \cdots x_{1m} \cdots x_{n1} \cdots x_{nm}$）$= x$ と書く．また，一般性を失うことなく $n = m$ とする．

3. 局所探索法

（QAP）の実行可能解 x に対して，近傍 $U(x)$ を x の二つの要素の位置を交換することによって得られる新しい解 x 全体の集合とする．この近傍 $U(x)$ 内で Cost が x よりも改善される解を探し，それを新しい解 x' とする．続けて近傍 $U(x')$ の中から再び新しい解 x'' を探す．この作業を近傍内で Cost が改善されなくなるまで繰り返し続ける（図 2）．この時，現在解を更新する方法として Best Move と First Move の 2 種類がある．

3. 1　First Move

現在解の近傍内を探索し，Cost が最初に更新された解を次の現在解とする．新しい現在解の近傍について同様に繰り返す．

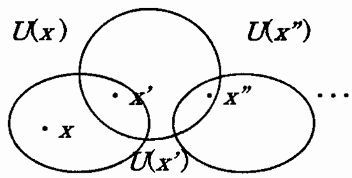

図 2　近傍変化の様子

3. 2　Best Move

現在解の近傍内全てを探索し，その中で Cost が最小値を取るような解を次の現在解とする．新しい現在解の近傍について同様に繰り返す．

4. メタ戦略（SimE）

4. 1　局所最適解からの脱出

局所探索法は局所最適解に達して停止する．この解はあくまで近傍内の最良解であり，厳密解からは遠い場合もある．そこで，局所最適解から脱出する機構を備えたメタ戦略が提案されている．本研究では比較的新しいメタ戦略である Simulated Evolution(SimE)を取り上げ，その探索能力を確かめる．

4. 2　SimE

SimE は局所最適解からの脱出を図る（改悪となる移動を許す）というよりは，近傍を選択的に拡大して扱う戦略である．これは様々な生物種が環境に適応していない特徴を進化させていくという原理に基づいている（図 3）．

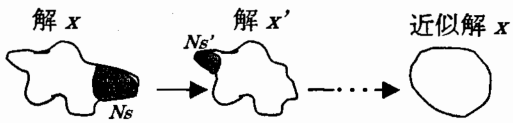

図 3　SimE による解の変化

4. 2. 1　SimE の二次割当て問題への適用

SimE を二次割当て問題に適用するため次のような記号を導入する．まず，$\sigma^{(i)}(j)$ を要素 i と結びつきが j 番目に大きい要素の番号，$\tau^{(p)}(j)$ を場所 p から j 番目に近い場所の番号として，現在解 x における要素 i の不具合度 $W_i(x)$ を

$$W_i(x) = \sum_{j=1}^{f} C_{i\sigma^{(i)}(j)} \cdot \left[\sum_{p,q} D_{pq} \cdot x_{ip} \cdot x_{\sigma^{(i)}(j)q} \right]$$

で定義する．これは，要素 i との結びつきの強い順に f 番目までの要素 $\sigma^{(i)}(j)$（j=1，2，・・・f）について，結びつきの強さ $C_{i\sigma^{(i)}(j)}$ と，解 x において i と $\sigma^{(i)}(j)$ が置かれている場所間の距離（$\sum_{p,q} D_{pq} \cdot x_{ip} \cdot x_{\sigma^{(i)}(j)q}$）の積を足し合わせたものであり，解 x における要素 i の Cost への寄与分を表す．また，同様に要素 i の評価基準値（最も望ましい場合の Cost）O_i を

$$O_i = \min_{p \in M} \sum_{i=1}^{f} C_{i\sigma^{(i)}(j)} \cdot D_{p\tau^{(p)}(j)}$$

で定義する．これは，要素 i を場所 p に置いたとして，i との結びつきが強い順に f 番目までの要素 $\sigma^{(i)}(j)$ （$j=1,\ 2,\ \cdots f$）を p から j 番目に近い場所 $\tau^{(p)}(j)$ に置いたときの要素 i に関係する Cost を考える．これらの中で p を変化させたときの最小値が Oi である．これは，要素 i を（他の要素の都合は考えずに）最も都合よく配置した場合の，（要素 i の）Cost への寄与分である．SimE における現在解の近傍は $Oi/Wi(x)$ の値が大きい要素から成る集合 Ns を選択し，Ns の要素間で場所の交換を行って得られる解の集合である．

4．2．2　SimE－QAP

step1. (QAP)の制約条件を満たす実行可能解をランダムに生成して初期解 x を生成する

step2. 現在解 x を構成する各要素 i の評価関数 $Gi(x) = Oi/Wi(x)$ を求める（$0 \leqq Gi(x) \leqq 1$）

step3. 解を構成する全要素集合から，更新対象となる要素の集合

Ns を評価関数 $Gi(x)$ の小さい方から順に k 個選び出す

step4. Ns 内の要素の再配置

> Ns の要素を $Gi(x)$ の昇順にソートしたものを
> $Ns = \{i_1,\ \cdots i_k\}$ とする（$Gi_e(x) \leqq Gi_{e+1}(x)$）
> $e=1,\ 2,\ \cdots k$ について要素 $i_1,\ \cdots i_{e-1}$ の位置を変化させないとして要素 i_e を Cost が最小となる位置へ再配置する．

step5. 新しい解の Cost を計算する．今までに得られた最小の Cost と比較し，s 回連続して更新されなかったら step6 へ，さもなければ step2 へ戻る

step6. 現在解（近似解），及び Cost を出力

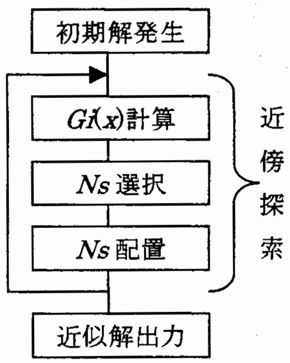

図 4　SimE 概要

5．数値実験

ベンチマーク問題[3]に対して， SimE，Fast Move ，Best Move により得られる解の精度を比較する．ここでは解の精度を，GRASP (greedy randomized adaptive search procedure, GRASP) により求められた近似解[3]との比（それぞれの方法で得られる Cost / GRASP による Cost）とする．GRASP 法は，最初の要素の置き場所と要素の割当て順をランダムに生成し，2 番目以降の要素をその順に（欲張り法で），Cost が最小になるところに配置して，初期解を得る．このように初期解を生成して逐次改善することを多数回繰り返すメタ戦略である．実験プログラムは Boland 社の Delphi6 で作成した．実行画面と出力結果の一例を以下に示す．

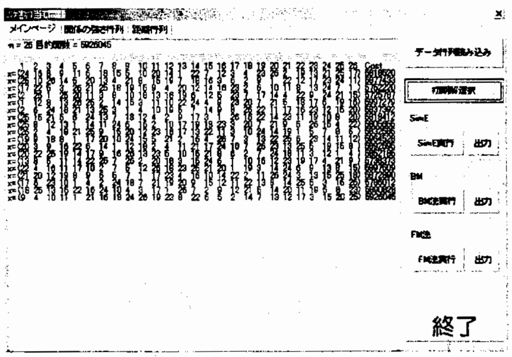

図 4　実行画面

```
初期解
x = 5 10 3 2 24 18 1 13 25 9 23 12 16 20 17 19 14 6 8 21 22 7 26 11 15 4
目的関数
5851439
BM法
x = 5 10 3 2 14 18 1 13 25 9 23 12 16 20 17 19 24 6 8 21 22 7 26 11 15 4
x = 5 10 3 9 14 18 1 13 25 2 23 12 16 20 17 19 24 6 8 21 22 7 26 11 15 4
x = 5 10 3 9 14 18 1 17 25 2 23 12 16 20 13 19 24 6 8 21 22 7 26 11 15 4
x = 5 10 3 9 14 18 1 17 25 2 23 12 16 7 13 19 24 6 8 21 22 20 26 11 15 4
x = 5 10 3 9 14 18 1 17 25 2 23 12 16 7 13 19 24 6 8 26 22 20 21 11 15 4

x = 6 18 3 9 20 22 25 17 19 4 12 8 5 7 13 11 24 10 16 26 14 15 1 23 2 21
x = 6 18 4 9 20 22 25 17 19 3 12 8 5 7 13 11 24 10 16 26 14 15 1 23 2 21
x = 6 18 3 9 20 22 25 17 19 4 12 8 5 7 13 11 24 10 16 26 14 15 1 23 2 21
5530043
解変更25回
```

図 5　結果出力

6. 実験結果及び考察

8種のベンチマーク問題[3]（bur26a～bur26h）について，3通りのメタ戦略を10通りの初期解にから出発して実験した．SimEでの非更新停止回数 s の値を20，更新対象（Ns ）の要素数 k を13とした．表1での解の精度，時間，解更新回数は実験回数10回の平均値である．実行時間の単位はミリ秒である．また，改善回数はGRASP法のCostより小さい値（良い解）が得られた回数である．(数値実験（1))．さらに，SimEに対してデータbur26aを用い，Step3の k の値を13，11，9，7，5の五種類の値について，実験を行った（数値実験（2))．

表1　数値実験結果(1)

局所探索法	First Move			Best Move			SimE（$k=13$，$s=20$）			
データ名	解の精度	時間	解更新回数	解の精度	時間	解更新回数	解の精度	時間	解更新回数	改善回数
bur26a	1.019049	28	70.2	1.018437	40	25.1	0.998571	39	45.5	4
bur26b	1.022105	32	78.1	1.022207	39	23.6	0.997822	38	48.1	7
bur26c	1.026008	31	71.2	1.026303	42	22.9	0.989905	41	50.2	7
bur26d	1.034658	35	67.5	1.031946	42	23.8	0.992523	45	49.2	8
bur26e	1.026602	32	75.5	1.026643	41	24.3	0.988303	39	48.2	8
bur26f	1.032455	29	74.2	1.031536	43	25.6	1.008050	42	52.9	5
bur26g	1.033326	31	71.7	1.033354	41	23.9	0.997582	38	50.0	6
bur26h	1.042959	32	76.2	1.042535	39	24.6	0.991152	37	49.8	8

表2　数値実験結果(2)

bur26a	SimE Step3				
k =	5	7	9	11	13
解の精度	1.155601	1.02125	1.01256	0.99872	0.998571
解更新回数	1241.8	263.2	83.8	48.0	45.5

本実験では，解の精度から見ると，First MoveとBest MoveはGRASP法と比べ，解が改善されたとは言えない．一方SimEはGRASP法と比べ，解を改善することができた．その理由は，First Move，Best Moveが局所最適解から脱出できていなく，SimEでは，局所最適解からの上手く脱出できたと考えられる．解更新回数でSimEと比較すると，Best Moveが良く，時間ではFirst Moveが早かった．しかしSimEが解の精度を更新したことを考えると気にならない程度だと言える．また，k の値を変化させた時，($n=26$ の時) $n \leqq 9$ の時にGRASP法より解の精度が落ちることが確認された．これは更新対象の要素数が $n=26$ に対して，小さすぎたと考えられる．

7. まとめ

本研究では，$n=26$ の二次割当て問題8種類[3]をメタ戦略SimEによって解く実験を試みた．SimEによって得られた目的関数値を，GRASP法により得られている目的関数値と比較した．その実験結果から，二次割当て問題に対してSimEは有効な解法になる可能性のあることが分かった．SA，TS等の他のメタ戦略との比較，アルゴリズムの改良（SimE－QAPのstep4）は今後の課題である．

【参考文献】

[1] 白石洋：「組み合わせ最適化アルゴリズムの最新手法」，丸善，1999.

[2] 柳浦睦憲、茨木俊秀：「組み合わせ最適化～メタ戦略を中心として～」，朝倉書店，2001.

[3] http://www.opt.math.tu-graz.ac.at/qaplib/inst.html