非対称巡回セールスマン問題に対する近似解法の評価

升岡　慎吾(沼田一道　助教授)

1　はじめに

巡回セールスマン問題（Traveling Salesman Problem : TSP）は，n 個の点および点間の距離（移動費用，所要時間）が与えられた時，全ての点を訪問して出発点に戻る巡回路の中で総移動距離が最短となるもの（最短巡回路）を求める問題である．TSP はいろいろな「順序決定問題」に現れ，また，組合せ最適化の標準的問題の一つとして様々な解法が研究されている．特に，点 i から点 j への移動距離（c_{ij}）と点 j から点 i への移動距離（c_{ji}）が等しい対称型巡回セールマン問題 (Symmetric TSP : STSP）についての研究は盛んである[1].

多くの場合，$c_{ij} = c_{ji}$ という仮定は自然であるが，中にはこれが成立しない問題もある．以下ではトラック一台ごとの積み降ろしを基本とする配送経路問題を解く際などに現れる非対称（$c_{ij} \neq c_{ji}$）な巡回セールスマン問題（Asymmetric TSP : ATSP）を取り上げる．ATSP はある程度の大きさの問題まで，割当問題を緩和問題とする分枝限定法で解くことができる．しかし，短時間で繰返し解くことが求められるような場合には，高速な近似解法に頼らざるを得ない．一般に，STSP のデータ量が n のオーダーであるのに対して，ATSP のそれは n^2 のオーダーなので，大きな（点数の多い）問題は扱い難く，近似解法の研究は STSP の場合ほど進んでいない．また ATSP に対する近似解法を比較評価した研究もあるが[3]，取り上げられていない解法もある．

本研究では，巡回路を徐々に作り上げていく構築法，特にグラフの性質を利用した構成的近似解法に注目する．まず，オイラー閉路を経由する方法[2]を理解・実装し，つぎに割当問題の解（部分巡回路一サイクル一の集合）を経由する方法を工夫する．数値実験により，両者の精度・速度を調べ，[3] で良い評価を得ている 3-opt 法（逐次改善法）と比較し，ATSP の近似解法についての知見を増やす．

2　ATSP の必然性

工場で製造された製品をトラックで顧客のもとに届ける際，積み込み地点で製品を満載にし，積み降ろし地点で全て降ろすという輸送形態がよく現れる．トラックは与えられた輸送要求を全て満たし，再び輸送基地へ戻る．その際，積み降ろし地点から次に行う輸送要求の積み込み地点までは荷物を何も積んでいない状態で走らねばならない．輸送要求を満たす順番によって変化するのは，この空輸送の距離だけなので，空輸送の総距離を最小にする要求処理順序（巡回路）が問題となる．

いま，図１のような２つの輸送要求が与えられたとする．積み込み地点から積み降ろし地点までの実輸送は１つの要求であるので１つのまとまりとして考える．このとき，輸送要求 i から輸送要求 j へ向かう場合と輸送要求 j から輸送要求 i へ向かう場合ではトラックが空で走る距離が異なる．従って，トラックの総空輸送距離を最小にする問題は，輸送要求を点，空輸送距離を点間の距離とする ATSP になる．

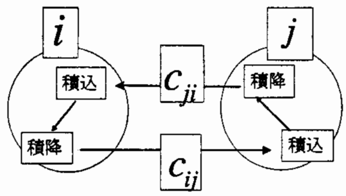

図１　輸送要求間の処理順序

3　ATSP の定式化

ATSP を，n 個の点と，i から j への長さ c_{ij} の枝，および j から i への長さ c_{ji} の枝からなる完全有

向グラフ $K(ATSP)$ の上で考える．一般に，有向グラフ G において，すべての点を一度ずつ通過する閉じた道（順方向の枝の列）をハミルトン閉路と呼ぶ．またすべての枝を一度ずつ通過する閉じた道をオイラー閉路と呼び，オイラー閉路を含むグラフをオイラーグラフと呼ぶ．

ATSP はすべてのハミルトン閉路の中で最短のものを求める問題であり，以下のように書ける．

Minimize $z = \sum_{ij \in H} C_{ij}$ Subject to $H \in \mathcal{H}$ ただし $\mathcal{H}$ はハミルトン閉路全体の集合

$K(ATSP)$ における $\mathcal{H}$ の要素数（ハミルトン閉路の総数）は $(n-1)!$ である．

4　オイラー閉路を経由する構築法[2]

まず[2]で提案された方法を示す．この近似解法は，$K(ATSP)$ の全点を含む出来るだけ枝長の合計が小さいオイラー部分グラフを作り，その（いくつかの）オイラー閉路から，総距離の小さいハミルトン閉路を解候補として生成する方法である．概略の手順を以下に示す．

[MDSG 法]

Step1：　各二点間において．距離の短い方の枝を残す．次に，枝の方向を無視した無向グラフと考え，その最小全域木を生成し（プリムの算法を用いた），向きを再生して MDSG（Minimal Directed Spanning Graph）を生成する．

Step2：　MDSG の各点において，枝が 1 本出ていれば+1，1 本入っていればー1 として，合計次数を計算する．次に次数がマイナスの各点から次数がプラスの各点までの距離を費用とし，前者を供給点（供給量＝次数の絶対値），後者を需要点（需要量＝次数）とするヒッチコック型輸送問題を解き，輸送に使った枝を加えて，総枝長の短いオイラーグラフを生成する．
（絶対値最大のマイナス次数の点から，一番近いプラスの点へ枝を加え，次数を更新して，同様の操作を全頂点の次数が 0 となるまで繰り返し，近似的に解いた）

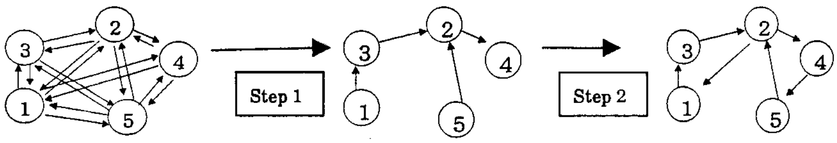

図 2　オイラー閉路を用いた近似解法の流れ（5 点の場合）

Step3：　Step 2 で得たオイラーグラフからいくつかの部分閉路が生成される．これを一つのオイラー閉路に生成する．

Step4：　Step 3 で得たオイラー閉路の通る点の順番を二回並べて書く（オイラー閉路が {1, 2, ..., 1} であるとすると {1, 2, ..., 1, 1, 2, ..., 1} というように）．1 つ目の点から初めて出てきた点を書き出していき，一つのハミルトン閉路を生成する．一つ目の点からの操作が終われば，始点を一つ右にずらして同様に行い，全ての点から行う．その様にしてできたハミルトン閉路の集合の中で最も総距離が小さいものを ATSP の近似解とする．

この方法は，最後にオイラー閉路からハミルトン閉路を生成するところで，長い枝を加えなくてはならない可能性がある．よって得られる解の精度はあまり良くないのではないかと想像される．

5　閉路集合を経由する方法

ATSP の実行可能解（巡回路）は，グラフ $K(ATSP)$ 上の循環流（各点での流入量と流出量が 1 で

あり循環する閉じた流れ）とみなせる．枝の長さを1流量単位の輸送費用とすると，ATSP の最適解は単一の閉路からなる最小費用循環流に対応する．費用最小の循環流は，割当問題の最適解で与えられる．割り当て問題は x_{ij} を i から j の輸送量とすると、以下のように定式化できる．

(AP) Minimize $z=\sum c_{ij}x_{ij}$ Subject to $x_{ij}\geq 0$, $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=\sum_{j=1}^{n}x_{ji}=1$.

(AP)は能率良く解くことが出きるが，その最適解は，一般に複数の循環流に分離し，そのままでは ATSP の実行可能解にならない．しかし，(AP)の最適値は(ATSP)の最短巡回路長の下界値になっており，最適解として得られた複数の閉路（以後サイクルと呼ぶ）を何らかの方法で統合し，1 つの巡回路にまとめることで良い巡回路（近似解）を得ることができるのではないかと期待される．

本研究では，サイクルを統合する方法を2つ提案する．以下，サイクルを $P^{(1)},P^{(2)},\ldots,P^{(S)}$ とし，サイクル $P^{(k)}$ を $P^{(k)}=(v_1^{(k)},v_2^{(k)},\ldots,v_{m_k}^{(k)})$ で表す．また点 u から点 v へ向かう枝を $\overrightarrow{uv}$ とする．

5.1 サイクル再割り当て法

サイクル間の（サイクル $P^{(i)}$ から $P^{(j)}$ への）距離 Dij をつぎのように与え，以下の操作を行う．

$$Dij \quad = \text{（サイクル}\ P^{(i)}\ \text{から}\ P^{(j)}\ \text{までの距離）} = (C_{v_{x^*}^{(i)}v_{y^*+1}^{(j)}} - C_{v_{x^*}^{(i)}v_{x^*+1}^{(i)}})$$

$$\text{ただし}\ (x^*,y^*) = \arg \underset{x,y}{\mathrm{Minimum}}\ (C_{v_x^{(i)}v_{y+1}^{(j)}} + C_{v_y^{(j)}v_{x+1}^{(i)}} - C_{v_x^{(i)}v_{x+1}^{(i)}} - C_{v_y^{(j)}v_{y+1}^{(j)}})$$

Step 1： 全てのサイクル間の距離を求め，サイクル $P^{(1)},P^{(2)},\ldots,P^{(S)}$ を点とみなして割り当て問題を解く．

Step 2： サイクルのサイクルができるので，それを順番につなげる．サイクル $P^{(i)}$ と $P^{(j)}$ のつなげ方は Dij の計算に用いた x^*,y^* に関して $\overrightarrow{v_{x^*}^{(i)}v_{y^*+1}^{(i)}}$ と $\overrightarrow{v_{y^*}^{(j)}v_{x^*+1}^{(i)}}$ の枝を加え $\overrightarrow{v_{x^*}^{(i)}v_{x^*+1}^{(i)}}$ と $\overrightarrow{v_{y^*}^{(j)}v_{y^*+1}^{(j)}}$ の枝を外す．

Step3： サイクルが一つになればそれを ATSP の解とし，さもなければ Step 1 に戻る．

5.2 サイクルの全域木を用いる方法

この方法ではサイクル間の距離をつぎのように与え，以下の操作を行う．

$$Dij = \text{（サイクル}\ P^{(i)}\ \text{から}\ P^{(j)}\ \text{までの距離）} = \mathrm{Minimum}\ (C_{v_x^{(i)}v_{y+1}^{(j)}} + C_{v_y^{(j)}v_{x+1}^{(i)}} - C_{v_x^{(i)}v_{x+1}^{(i)}} - C_{v_y^{(j)}v_{y+1}^{(j)}})$$

Step 1： 最初のサイクルを一つ選ぶ．

Step 2： 現在のサイクルから他の全てのサイクルへの距離を求める．

Step 3： その中で最も距離が小さかったサイクルと最初のサイクルをつなげ（つなげ方は 5.1 と同様）現在のサイクルとする．サイクルが一つになればそれを ATSP の近似解とし，さもなければ Step 2 に戻る．

6 逐次改善法

比較の対象として逐次改善法である 3-opt 法を取り上げた．3-opt 法は，何らかの巡回路（例えばランダムに生成）から出発し，現在の巡回路において，ある3本の枝を別の3本の枝に交換して再び巡

回路を作ってみて巡回路の長さが短縮されるならこの枝の入れ替えを行う．これを距離が短縮される枝の入れ替えがなくなるまで繰りかえす方法である．ATSP の場合，枝には向きが有るので，枝の入れ替え方は巡回路の向きに逆らわない一通りのみを考える．本研究ではランダムな初期巡回路に対して 3-opt 法を用いることで，性能を評価した．

7 数値実験の結果と考察

ATSP に対する 4 つの近似解法について実験的に比較，評価した．結果を以下の表 1 に示す．3-opt 法はランダムに生成される初期の巡回路によって値が異なるので，10 回計測し，その平均値（小数点以下は四捨五入）を示した．プログラムはボーランド社の Delphi6 を用いて作成し，データは TSPLIB95 の中の ATSP のデータを使用した．計算時間の単位は msec，使用した計算機の CPU は Intel celelon 650Mhz である．

表 1．数値実験結果

	近似解法		オイラー閉路を用いる方法	サイクル再割り当て法	サイクルの全域木を用いる方法	3-opt法
データ名	都市数	最適値	近似解（計算時間）	近似解（計算時間）	近似解（計算時間）	近似解（計算時間）
Br17	17	39	56 (17)	39 (25)	39 (10)	39 (0)
ft70	70	38673	49798 (43)	39514 (80)	39144 (73)	38849 (21)
ftv38	39	1530	1775 (11)	1836 (25)	1547 (15)	1646 (1)
ftv55	56	1680	2561 (22)	1712 (48)	1671 (39)	1707 (20)
ftv70	71	1980	2937 (33)	2226 (83)	2007 (74)	2082 (25)

まず，オイラー閉路を用いる方法と 3-opt 法を比べてみた．これは全てのデータで近似解の精度においても計算時間においても 3-opt 法より悪い性能を示した．次に二つのサイクル統合法と 3-opt 法を比べてみた．サイクル再割り当て法は 3-opt 法より性能的に劣ることが分かるが，木を用いる方法は，ほとんどのデータにおいて精度は 3-opt 法より精度が良い結果を得られた．

8 まとめ

提案したサイクル統合法は独自に工夫したものであるが，特に木を用いたサイクル統合法は所要時間，解の精度とも良好な結果を示した．実際に ATSP を解く場合，木を用いたサイクル統合法で初期解を作り，それを 3-opt 法で逐次改善する方法は，かなり有望と思えた．

本研究で報告したような実験結果を載せている文献は，探した範囲では見出せなかったが，他の研究との照合は今後の課題である．

9 参考文献

[1]山本芳嗣，久保幹夫：「巡回セールスマン問題への招待」，朝倉書店，東京，1995.

[2]Selim.G.Aki「The Minimal Directed Spanning Graph for Combinatorial Optimization」The Australian Computer Journal, Vol.12, No.4, P132−136, 1980.

[3]吉村央紀：「非対称巡回セールスマン問題に対する近似解法の検討」平成 12 年度東京理科大学工学部経営工学科卒業論文，2001.