DEAの枠組みに基づく新しい経営効率測定法の提案

関　洋人（沼田一道　助教授）

1．はじめに

経済環境の悪化に伴い，事業体の経営効率を客観的に評価することは極めて重要な課題となっている．事業体は複数の資源を入力して，複数の便益を産出するものであるから，どの資源，どの便益に重きを置くかにより，その活動の効率性の評価は変わってくる．DEA(Data Envelopment Analysis)は公共機関から民間企業に至るさまざまな事業体の効率を現存する企業体の活動に基づいて相対的に評価する為の手法である．DEAでは効率的な活動を行う事業体を特定するのと同時に非効率な事業体の改善案を具体的に示すことができる．DEAの考え方では各事業体のいろいろな特徴を認める為，極端な特徴を持った企業でも効率的だと判断される．しかし，この考え方により非現実的なウエイトの配分という問題と同時に，識別能力（非効率性の検出力）の不十分さという相互に関係する問題が生じてくる．これらの問題を克服すべく，クロス効率行列やウエイト規制法などのアプローチがなされてきた．しかし，クロス効率行列では新しい効率値に対するウエイトを供給しないという問題が生じ，ウエイト規制法では人間の価値判断を含む，先見的な情報を必要とする．最近 Xiao-Bai Li,　Gary R.Reeves【２】らはこれらの問題をも解決すべく MCDEA(Multiple Criteria Data Envelopment Analysis)モデルを提案した．本研究では MCDEA の枠組みを用い，識別能力を更に上げた MCDEA＋αモデルを提案する．この MCDEA＋αモデルは先見的な情報を必要とせずに，最良の事業体を特定する事が出来るのと同時に，新しい効率値に対するウエイトを供給することが出来る．

2．DEA【１】

DEAでは，評価対象である事業体をDMU(Decision Making Unit)と呼び，ｎ個の事業体を $DMU_1, DMU_2, \cdots, DMU_n$ とする．全てのDMU（ｎ個）は同じ環境のもとで複数種類の入力から複数種類の出力を産出していると仮定する．ここで，各DMUのｍ個の投入項目を $x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{mj}$，ｓ個の産出項目を $y_{1j}, y_{2j}, \cdots, y_{sj}$ とする $(j = 1, \cdots, n)$．対象とするDMUを DMU_0 とし，その入出力値にウエイトを乗じて仮想的入出力

仮想的入力：$v_1 x_{10} + v_2 x_{20} + \cdots + v_m x_{m0}$　　入力につけるウエイト：$v_i (i = 1, \cdots, m)$

仮想的出力：$u_1 y_{10} + u_2 y_{20} + \cdots + u_s y_{s0}$　　出力につけるウエイト：$u_r (r = 1, \cdots, s)$

を作り，その比率尺度

$$\frac{\text{仮想的出力}}{\text{仮想的入力}} = \frac{u_1 y_{10} + u_2 y_{20} + \cdots + u_s y_{so}}{v_1 x_{10} + v_2 x_{20} + \cdots + v_m v_{m0}}$$

をもとに効率値を計算する．この時全てのDMUの比率を１以下に制限した上で，分析対象の比率を最大にするようなウエイトを求め，そのウエイトを用いて計算した比率を DMU_0 の効率値と定義する．この問題は分数計画問題であるが，目的関数の分母を１に固定することによって等価な線形計画問題＜LP_0＞に書き換えることができる．更に各DMUの仮想的入力と仮想的出力の差を d_j として，スラック変数 d_j を用いて＜LPD_0＞のように書き換える事が出来る．

$$\langle LP_0 \rangle \quad \max \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}$$
$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1$$
$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \le \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \quad (j=1,\cdots,n)$$
$$x_{ij}, yi_j, v_i, u_r \ge 0$$

$$\langle LPD_0 \rangle \quad \min \ d_0$$
$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1$$
$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + d_j = 0 \quad (j=1,\cdots,n)$$
$$x_{ij}, yi_j, v_i, u_r, d_j \ge 0$$

LP_0，LPD_0は共に各DMUの仮想的出力が仮想的入力以下であることを制限し，DMU_0の仮想的入力を１に固定する．ここでLP_0ではDMU_0の仮想的出力を出来るだけ大きく(１に近づける)しようと考え，$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}$が１になった時に効率的であると判断される．また効率値は$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}$で表わされる．一方$LPD_0$は，$DMU_0$の仮想的入力と仮想的出力の差（$d_0$）を出来るだけ少なく（０に近づける）しようと考え，$d_0 = 0$の時にDMU_0は効率的であると判断される．また効率値は$1 - d_0$で表わされる．これら２つのモデルは等価なものである．

３．MCDEA

MCDEAモデルはLPD_0の発展型モデルである．d_jを操作する事により, 全DMUの事を考慮したu，vを与えることが出来る．MCDEAモデルでは，いくつかの違った効率尺度（従来のDEA効率尺度を含む）が同じ生産可能領域の制約の下で定義されている．それぞれの尺度は最適化の目標となり，効率性は以下の多目的線形計画問題＜MOLP＞の枠組みの下で評価される．

＜MOLP＞

$$\min \quad d_0$$
$$\min \quad M \qquad \text{or} \qquad \min \quad \sum_{j=1}^{n} d_j$$
$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij0} = 1$$
$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + d_j = 0 \qquad (j=1,\cdots,n)$$
$$M - d_j \ge 0 \qquad (j=1,\cdots,n)$$
$$x_{ij}, yi_j, v_i, u_r, d_j, M \ge 0$$

尺度min　d_0は従来のDEA効率尺度である．尺度min Mは全DMUの中でd_jが最大のものを出来るだけ小さくさせるものである．尺度min　$\sum_{j=1}^{n} d_j$は全DMUのd_jの平均値を出来るだけ小さくさせるものである．始めにmin M（Min maxモデル）もしくはmin　$\sum_{j=1}^{n} d_j$（Min sumモデル）を単一目的として最適化し，そのウエイト実行可能領域内でmin　d_0を単一目的として最適化する．min Mやmin　$\sum_{j=1}^{n} d_j$によってあまり身勝手なウエイト付けが出来なくなり，全DMUを考慮したu，vが必要となる為，ウエイト実行可能領域は限定される．この中でDMU_0が効率的だと判断される為には，$d_0 = 0$になる解集合の幅広さ（柔軟性）が求められる．これは識別能力の増加に繋がる．その後は従来のDEAと同じ操作を行うので，与えられた効率値に対する入出力ウエイトを得る事が出来る．よってMCDEAモデルでは従来のDEAの識別能力を改善し，また先見的な情報なしでより妥当な入出力ウエイトを効果的に算出する事が出来る．【２】

４．新しい測定法の提案

MCDEA モデルにおいて識別能力を上げることが出来るが，最良のものを特定したい時は不十分である．以下に示す＜MCDEA＋α＞を用いると最良の DMU を特定する事が出来る．

＜MCDEA＋α＞

$$\min \quad d_0$$

$$\min \quad M - \alpha d_0 \quad (\alpha = 0\ ,\ 0.1\ ,\ 0.2\ ,\ \cdots\ ,\ 1)$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij0} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + d_j = 0 \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

$$M - d_j \geq 0 \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

$$x_{ij}, y_{ij}, v_i, u_r, d_j, M \geq 0$$

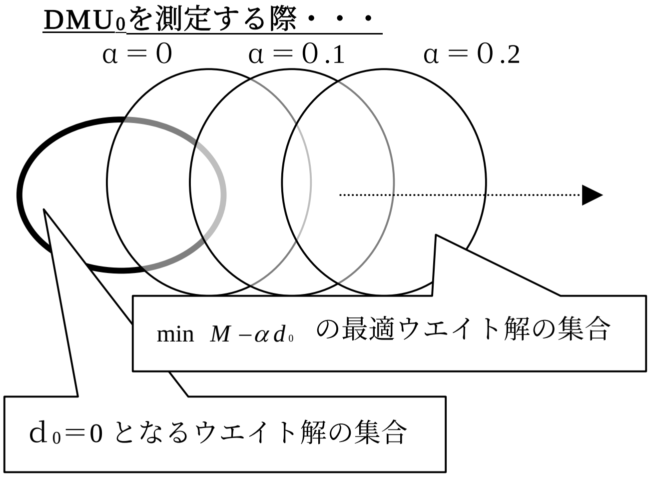

図１　min　$M - \alpha d_0$ と実行可能領域との関係

尺度 min　$M - \alpha d_0$　$(\alpha = 0\ ,\ 0.1\ ,\ 0.2\ ,\cdots ,\ 1)$ を新たに加える．min　$-\alpha d_0$ は max　αd_0 と同じである．ここでαの割合を増やしていくと，d_0 の最大化される割合が増える為に $d_0 = 0$ になりにくくなる．よってあるDMUの $d_0 = 0$ になるウエイト解の集合が幅広いほど，αの増加に耐えられることになる．具体的には始めにα＝０に設定し，MCDEAと同様の実験を行う．その際に効率的であると判断されたDMUを対象として，α＝0.1 に設定を変えて同様の実験を行う．以下同様に α の値を徐々に上げていき，効率的だと判断され続けられたものが最良のDMUとなる．

５．数値実験

新しく提案した＜MCDEA＋α＞の与える効率値を, ＜LPD_0＞, ＜MCDEA＞と比較して検討する．比較のために用いたデータは老人ホームのデータ（２入力２出力で６のDMU）【２】である．

表１．老人ホームのデータ【２】

DMU	入力項目		出力項目	
	平均労働時間(h)	経費(百万円)	低所得者患者数(人)	所得者患者数(人)
A	1.50	0.2	1.40	0.35
B	4.00	0.7	1.40	2.10
C	3.20	1.2	4.20	1.05
D	5.20	2.0	2.80	4.20
E	3.50	1.2	1.90	2.50
F	3.20	0.7	1.40	1.50

６．結果および考察

MCDEA＋αについては MCDEA で効率値が１となった A,D を対象に測定した．

表２．従来の DEA での測定結果

病院	効率値	d_0	M	Σd_j	入力ウエイト		出力ウエイト	
DMU	$1-d_0$				v_1	v_2	u_1	u_2
A	1	0	0.477	0.967	0.517	1.121	0.505	0.837
B	1	0	0.206	0.353	0.138	0.642	0.144	0.380
C	1	0	0.438	1.012	0.313	0	0.170	0.274
D	1	0	0.269	0.623	0.104	0.169	0.192	0
E	0.987	0.013	0.165	0.282	0.110	0.513	0.115	0.304
F	0.865	0.135	0.232	0.396	0.155	0.722	0.162	0.427

表３．Minmax モデルでの測定結果

病院	効率値	M	入力ウエイト		出力ウエイト	
DMU	$1-d_0$		v_1	v_2	u_1	u_2
A	1	0.397	0.449	1.634	0.457	1.029
B	0.953	0.135	0.153	0.556	0.156	0.350
C	0.883	0.117	0.132	0.481	0.135	0.303
D	1	0.071	0.080	0.292	0.082	0.184
E	0.974	0.113	0.127	0.463	0.129	0.291
F	0.846	0.154	0.174	0.633	0.177	0.399

表４．Minsum モデルでの測定結果

病院	効率値	Σd_j	入力ウエイト		出力ウエイト	
DMU	$1-d_0$		v_1	v_2	u_1	u_2
A	1	0.967	0.517	1.121	0.505	0.837
B	0.864	0.339	0.181	0.393	0.177	0.293
C	0.83	0.291	0.114	0.530	0.119	0.314
D	1	0.176	0.069	0.321	0.072	0.190
E	0.997	0.282	0.110	0.513	0.115	0.304
F	0.867	0.396	0.155	0.722	0.162	0.427

表５．MCDEA＋α モデルでの測定

	DMU A					DMU D				
$M-\alpha d_0$	効率値	入力ウエイト		出力ウエイト		効率値	入力ウエイト		出力ウエイト	
	$1-d_0$	v_1	v_2	u_1	u_2	$1-d_0$	v_1	v_2	u_1	u_2
α＝0	1	0.449	1.163	0.457	1.029	1	0.080	0.292	0.082	0.184
α＝0．1	1	0.449	1.163	0.457	1.029	1	0.080	0.292	0.082	0.184
α＝0．2	1	0.449	1.163	0.457	1.029	1	0.080	0.292	0.082	0.184
α＝0．3	1	0.449	1.163	0.457	1.029	0.907	0.073	0.312	0.082	0.161
α＝0．4	1	0.449	1.163	0.457	1.029	0.907	0.073	0.312	0.082	0.161
α＝0．5	1	0.449	1.163	0.457	1.029	0.907	0.073	0.312	0.082	0.161
α＝0．6	1	0.449	1.163	0.457	1.029	0.907	0.073	0.312	0.082	0.161
α＝0．7	1	0.449	1.163	0.457	1.029	0.907	0.073	0.312	0.082	0.161
α＝0．8	0.571	0.612	0.408	0.204	0.816	0.907	0.073	0.312	0.082	0.161
α＝0．9	0.571	0.612	0.408	0.204	0.816	0.907	0.073	0.312	0.082	0.161
α＝1．0	0.571	0.612	0.408	0.204	0.816	0.907	0.073	0.312	0.082	0.161

従来のDEAでは６個のDMUのうち４個が効率的だと判断されているが, Minmaxモデル, Minsumモデルとも A, D の２個に絞られている．これは MCDEA モデルが従来のものより高い識別能力を持つことを示している．さらに D に注目すると，従来の DEA，MCDEA 共に効率値は１となったが，ウエイト解に注目すると従来の DEA の方が極端なウエイトが与えられた．よって MCDEA は「非現実的なウエイトの配分」という問題に関しても克服している．MCDEA＋αモデルではα＝0.3 とした時点で A の効率値が１だったのに対し，D の効率値が 0.907 になってしまった．このことから A が最良の DMU だと判断される．MCDEA では従来の DEA よりも識別能力を上げることが出来たが，必ずしも最良のものを見つけられるとは限らない．しかし MCDEA＋αを用いれば必ず最良の DMU を見つけることが出来る．またαの値を上げて行くことで，より平均的なウエイト解を得られるのがわかる．

７．まとめ

経営効率測定の際, MCDEA＋αは従来のDEAやMCDEAよりも識別能力を上げることが出来る．また min　$M-\alpha d_0$ の尺度によって MCDEA＋αでは最良の DMU を見つけることが出来るため，多数の候補の中から一つのものを選択する際に有効である．しかし，MCDEA，MCDEA＋αでは「入出力項目の値においてバランスのよいものが良い事業体である」と言う前提で作られている．しかし，現実の問題はそうとも限らない．実現の可能性については技術的な面とマネジメントの面の両方から十分検討する必要がある．また，この問題の妥当性を評価するにはもう少し大きい現実の問題に適用してみる必要があると思われるが，これは今後の課題である．

[参考文献]

【1】刀根　薫：「経営効率性の測定と改善」，日科技連出版社，1993

【2】Xiao-Bai Li,Gary R.Reeves ： A multiple criteria approach to date envelopment analysis
European Journal of Operation Research,115,596-607,1999.