DEAの枠組みに基づく
新しい経営効率測定法の提案

工学部経営工学科
沼田研究室
4499053番　関　洋人

・発表構成

1．はじめに
2．包絡分析法DEA
3．MCDEAモデル
4．新しい測定法（MCDEA＋αモデル）の提案
5．例題による検証
6．まとめ
7．参考文献
8．付録

1.　はじめに

経済環境の悪化に伴い、事業体の経営効率を客観的に評価する事は重要な課題となっている。

DEA (Data Envelopment Analysis)

によってさまざまな事業体の効率性を相対的に評価することが出来る。

・発表の流れ、目的

第2章　DEA　：DEAの概念、計算法、問題点

改良！！

第3章　MCDEA　：DEAの問題点を克服した先行研究

改良！！

第4章　MCDEA＋α　：MCDEAの改良モデルMCDEA＋αの提案

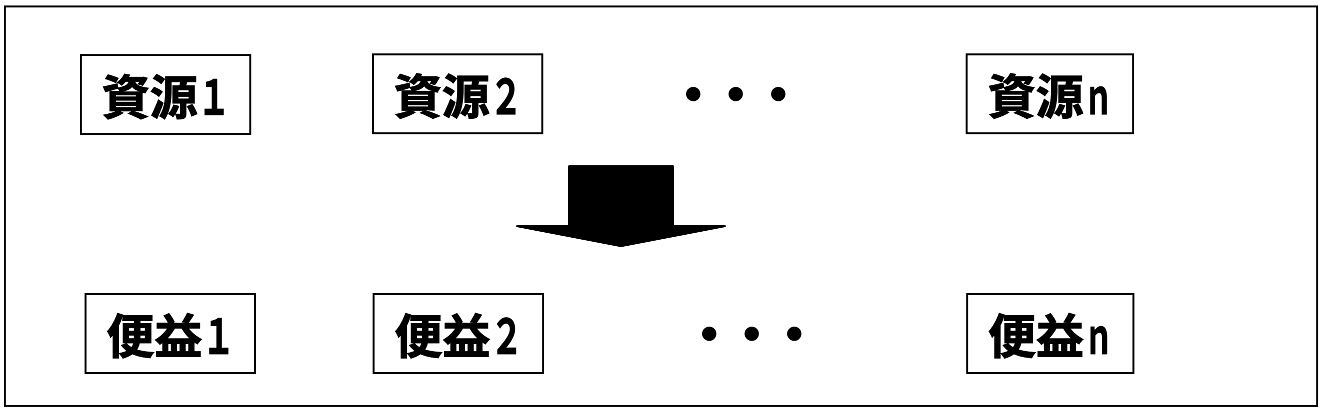
第5章　例題による検証　：数値データを用いて、各モデルを比較、検討する。

第6章　まとめ

2．　包絡分析法DEA[1]

２．１ DEAの概要

事業体の活動 ：少ない資源から、多くの便益を産出する活動が効率的！！



どの資源、どの便益に重きを置くかにより、その評価は変わってくる。

DEAでは各事業体の独自性（入出力項目の重きの置き方）を最大限認めて評価するのが特徴である。

2．2　CCRモデル

記号の説明

- DMU（Decision　Making　Unit）：評価対象の事業体

  （n個の事業体をDMU$_1$,DMU$_2$,…,DMU$_n$ で表わす）

- DMUo：分析対象の事業体

- $x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj}$　$(j = 1, \ldots, n)$　：投入データ

- $y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{sj}$　$(j = 1, \ldots, n)$　：産出データ

- $v_i (i = 1, \ldots, m)$　：入力につけるウエイト

- $u_r (r = 1, \ldots, s)$　：出力につけるウエイト

２．２　CCRモデル（続き）

比率尺度

$$\frac{\text{仮想的出力}}{\text{仮想的入力}} = \frac{u_1 y_{10} + u_2 y_{20} + \ldots + u_s y_{so}}{v_1 x_{10} + v_2 x_{20} + \ldots + v_m v_{m0}}$$

ウエイトの条件

①全てのDMUの比率を１以下に制限する。

②分析対象DMUoの比率を最大にする。

$$\frac{\text{仮想的出力}}{\text{仮想的入力}} \rightarrow \text{最大値は}1$$

2．2　CCRモデル(続き)

・分数計画問題＜FP_0＞への定式化

$$
\langle FP_0 \rangle \quad \max \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}}
$$

$$
s.t. \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r x_{ri}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \leq 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)
$$

$$
x_{ij}, y_{ij}, v_i, u_r \geq 0
$$

DMU_0の効率値

2．2　CCRモデル（続き）

・線形計画問題＜LP$_0$＞への定式化

＜LP$_0$＞

$$\max \quad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1$$

$$※ \quad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \leq \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ij}, y_{ij}, v_i, u_r \geq 0$$

DMU$_0$の効率値

線形計画問題<LP$_0$>→ <LPD$_0$>の変換

<LPD$_0$> $\min \quad d_0 \quad \left[\ or \quad \max \quad h_0 = \sum_{r=1}^{m} u_r y_{rj0} \right]$

$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1$

$$\boxed{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + d_j = 0} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ij}, y_{ij}, v_i, u_r, d_j \geq 0$$

MCDEAの基礎

※ $\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \leq \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}$

スラック変数の導入

効率値＝ $1 - d_0$

- $d_0 = 0$ **である活動・・・・D効率的である。**
- $0 < d_0 \leq 1$ **である活動・・・・D非効率である。**

2．3　DEAの問題点

表１．２入力１出力のデータ（例２）

活動	A	B	C	D	E	F	G	H	I
入力x_1	20	10	5	5	4	2.5	2	1.25	1
入力x_2	1	1.25	5	2.5	2	5	4	10	20
出力y	1	1	1	1	1	1	1	1	1

表２．例２の結果

		入力ウエイト		出力ウエイト
	効率値	v_1	v_2	u_1
A	1	0	1	1
B	1	0.05	0.4	1
C	0.6	0.1	0.1	0.6
D	0.8	0.133	0.133	0.8
E	1	0.167	0.167	1
F	0.8	0.32	0.04	0.8
G	1	0.4	0.05	1
H	1	0.667	0.017	1
I	1	0.667	0.017	1

2．3　DEAの問題点（続き）

①識別能力（非効率性の検出力）の不十分さ

多くのDMUを効率的だと判断してしまう。

②非現実的なウエイトの配分

出力、もしくは入力に極端なウエイトを持ってしまうと、
それだけで効率的だと判断してしまう。

３．　ＭＣＤＥＡモデル

(Multiple Criteria Data Envelopment Analysis)

3.1 MCDEAモデルの概要

DEAの問題点

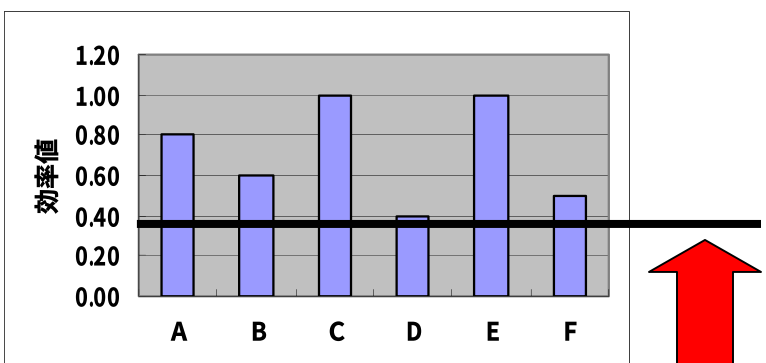
①識別能力の不十分さ ②非現実的なウエイトの配分

MCDEAモデル

全DMUの都合を考慮したウエイト (u, v) を強制する！！

→あまり勝手な重み付けが出来なくなる。

→①, ②の問題点の克服！！



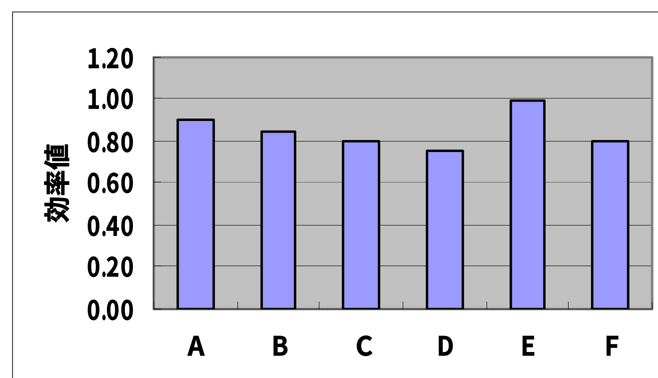


図１．**MCDEA**モデルと効率値の関係

3．2　ＭＣＤＥＡモデル

MCDEAモデルの定式化

<MOLP>

$$\min \quad d_0 \quad \left(or \quad \max \quad h_0 = \sum_{r=1}^{m} u_r y_{rj0} \right) \quad ①$$

$$\min \quad M \quad ② \qquad \text{or} \qquad \min \quad \sum_{j=1}^{n} d_j \quad ③$$

Min max モデル

Min sum モデル

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + d_j = 0 \qquad (j = 1, \dots, n)$$

$$M - d_j \geq 0 \qquad (j = 1, \dots, n)$$

$$x_{ij}, y_{ij}, u_r, v_i, d_j, M \geq 0$$

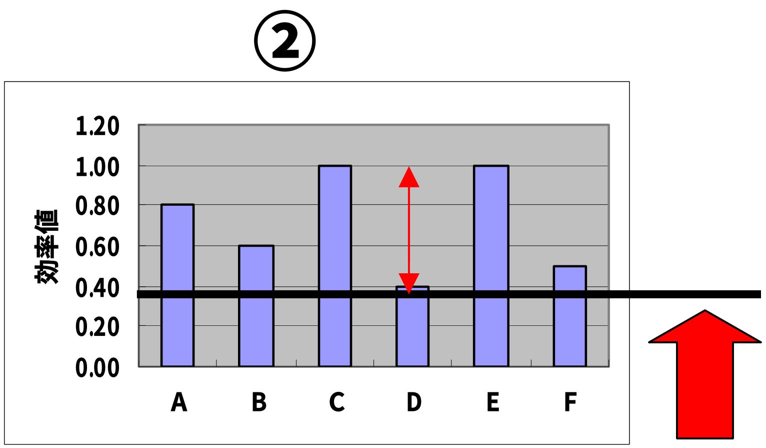
3．2　MCDEAモデル（続き）

3つの目的関数の説明

① $\min \quad d_0$ ： 従来のDEA効率尺度である。

② $\min \quad M$ ： 全DMUの中で d_j が最大のものを出来るだけ、小さくする。

③ $\min \quad \sum_{j=1}^{n} d_j$ ： 全DMUの中で d_j の平均値を出来るだけ、小さくする。



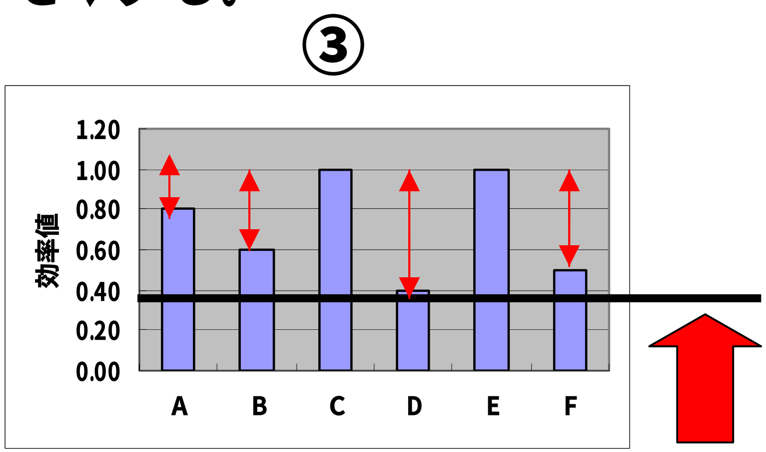


図２．MCDEAモデルの尺度と効率値の関係

3．3　MCDEAの不十分な点

MCDEAモデルはウエイト解を絞ることにより、

識別能力を増加することが出来る。

しかし、

複数のDMUが効率的と判断されることがある。

４． 新しい測定法の提案
（MCDEA＋αモデル）

4.1 MCDEA＋αモデルの概要

MCDEAモデル

従来のDEAより識別能力は高いが、複数のDMUが効率的と判断されることがある。

MCDEA＋αモデル

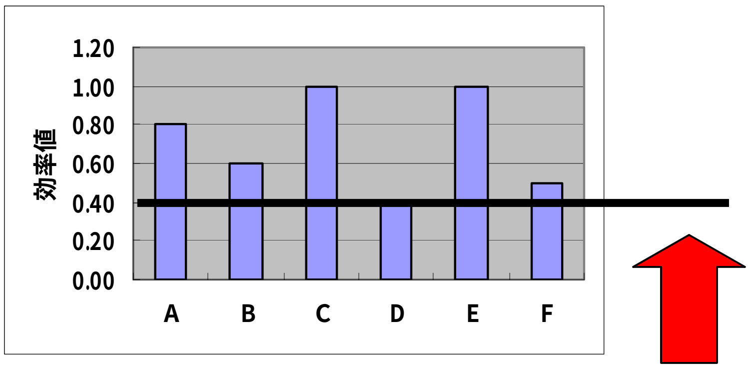
MCDEAの識別能力を更に強化し、最良のDMUを特定することが出来る。

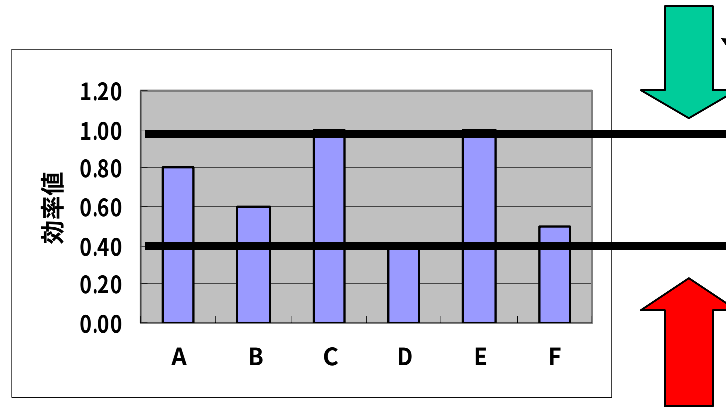
対象：MCDEAで効率値が1になったDMU

4.1 MCDEA＋αモデルの概要（続き）

MCDEAモデル

MCDEA＋αモデル





圧力をどんどん増加させる！

図3．MCDEAモデルとMCDEA＋αモデルの比較

MCDEA＋αモデルでは
最後まで効率的と判断され続けたものが
最良のDMUとなる！！！

4．2　MCDEA＋αモデル

MCDEA＋αモデルの定式化

＜MOLP＞ min d_0

min $M - \alpha S \quad (\alpha = 0, 0.1, 0.2, \cdots)$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + d_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$M - d_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$S - d_j \leq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ij}, y_{ij}, u_r, v_i, d_j, M \geq 0$$

4.2 MCDEA＋αモデル(続き)

MCDEA＋αモデルの計算法

＜MOLP＞

$$\min \quad d_0$$

$$\min \quad M - \underline{0 \bullet S}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + d_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$M - d_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$S - d_j \leq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ij}, y_{ij}, u_r, v_i, d_j, M \geq 0$$

効率値が1となるDMUが1つに絞られる→最良のDMUが決定される！

効率値が1となるDMUが1つに絞られない→α＝α＋0.1にして計算。

4．2　ＭＣＤＥＡ＋αモデル(続き)

MCDEA＋αモデルの計算法

＜MOLP＞

$$\min \quad d_0$$

$$\min \quad M - 0.1 \bullet S$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + d_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$M - d_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$S - d_j \leq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ij}, y_{ij}, u_r, v_i, d_j, M \geq 0$$

効率値が１となるDMUが１つに絞られる→最良のDMUが決定される！

効率値が１となるDMUが１つに絞られない→α＝α＋0.1にして計算。

５．　例題による検証

5．1 使用するデータ

表3．老人ホームの例（1日あたり）[2]

DMU	入力項目		出力項目	
	平均労働時間（h）	経費（百万円）	低所得者患者数（千人）	所得者患者数（千人）
A	1.50	0.2	1.40	0.35
B	4.00	0.7	1.40	2.10
C	3.20	1.2	4.20	1.05
D	5.20	2.0	2.80	4.20
E	3.50	1.2	1.90	2.50
F	3.20	0.7	1.40	1.50

5．1　使用するデータ（続き）

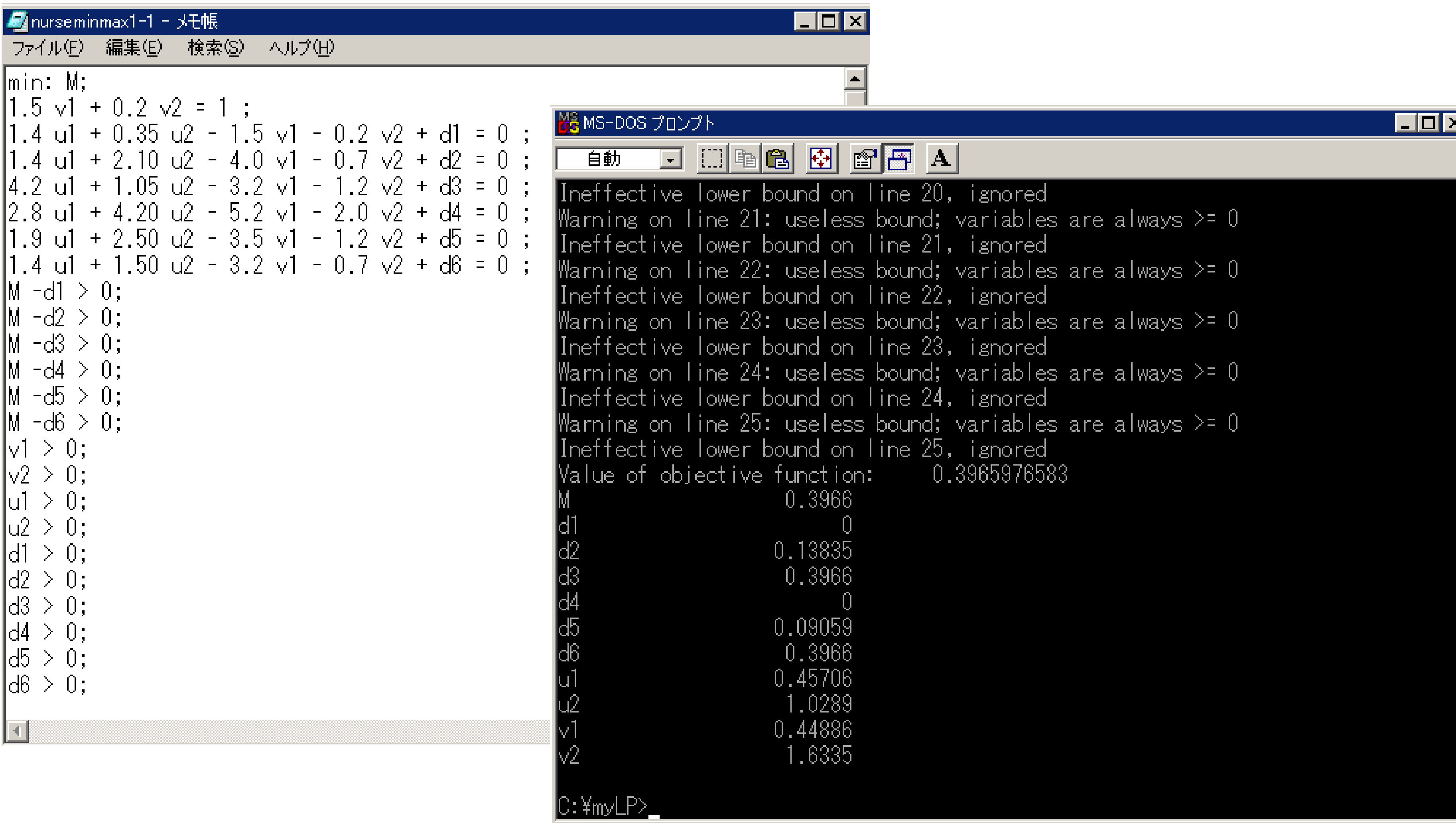


図４．lp_solveの実行画面

5．2　結果、考察

表4．従来のDEAでの測定結果

DMU	効率値	入力ウエイト		出力ウエイト	
	$1-d_0$	v_1	v_2	u_1	u_2
A	1	0.517	1.121	0.505	0.837
B	1	0.138	0.642	0.144	0.38
C	1	0.313	0	0.17	0.274
D	1	0.104	0.169	0.192	0
E	0.978	0.11	0.513	0.115	0.304
F	0.865	0.155	0.722	0.162	0.427

表5．Minmax　MCDEAの例

DMU	効率値	入力ウエイト		出力ウエイト	
	$1-d_0$	v_1	v_2	u_1	u_2
A	1	0.449	1.634	0.457	1.029
B	0.953	0.153	0.556	0.156	0.35
C	0.883	0.132	0.481	0.135	0.303
D	1	0.08	0.292	0.082	0.184
E	0.974	0.127	0.463	0.129	0.291
F	0.846	0.174	0.633	0.177	0.399

表6．Minsum　MCDEAの例

DMU	効率値	入力ウエイト		出力ウエイト	
	$1-d_0$	v_1	v_2	u_1	u_2
A	1	0.517	1.121	0.505	0.837
B	0.864	0.181	0.393	0.177	0.293
C	0.83	0.114	0.53	0.119	0.314
D	1	0.069	0.321	0.072	0.19
E	0.977	0.11	0.513	0.115	0.304
F	0.867	0.155	0.722	0.162	0.427

①識別能力の不充分さ、②非現実的なウエイトの配分

両方の問題とも克服！！！

5．2　結果、考察（続き）

表7．MCDEA＋αでの測定結果

	DMU　A					DMU　D				
M- α d_0	効率値	入力ウエイト		出力ウエイト		効率値	入力ウエイト		出力ウエイト	
	$1-d_0$	v_1	v_2	u_1	u_2	$1-d_0$	v_1	v_2	u_1	u_2
α＝0	1	0.449	1.634	0.457	1.029	1	0.080	0.292	0.082	0.184
α＝0.1	1	0.449	1.634	0.457	1.029	1	0.080	0.292	0.082	0.184
α＝0.2	1	0.449	1.634	0.457	1.029	1	0.080	0.292	0.082	0.184
α＝0.3	1	0.449	1.634	0.457	1.029	1	0.080	0.292	0.082	0.184
α＝0.4	1	0.449	1.634	0.457	1.029	1	0.080	0.292	0.082	0.184
α＝0.5	1	0.449	1.634	0.457	1.029	1	0.080	0.292	0.082	0.184
α＝0.6	1	0.449	1.634	0.457	1.029	1	0.080	0.292	0.082	0.184
α＝0.7	1	0.449	1.634	0.457	1.029	1	0.080	0.292	0.082	0.184
α＝0.8	1	0.449	1.634	0.457	1.029	1	0.080	0.292	0.082	0.184
α＝0.9	1	0.449	1.634	0.457	1.029	1	0.080	0.292	0.082	0.184
α＝1.0	1	0.449	1.634	0.457	1.029	1	0.080	0.292	0.082	0.184
α＝1.1	0.607	0.580	0.649	0.240	0.774	1	0.080	0.292	0.082	0.184
α＝1.2	0.607	0.580	0.649	0.240	0.774	1	0.080	0.292	0.082	0.184
α＝1.3	0.607	0.580	0.649	0.240	0.774	0.909	0.134	0.150	0.056	0.179

DMU　Dが最良のDMUだと判断される。

効率値に対するウエイトも提供される。

5．2　結果（続き）

表8．クロス効率性行列[3]での測定結果

	Aのウエイト	Bのウエイト	Cのウエイト	Dのウエイト	Dのウエイト	Eのウエイト	クロス効率値
Aの効率値	1	1	0.865	0.917	1	1	0.964
Bの効率値	0.612	1	0.563	0.731	1	1	0.818
Cの効率値	1	0.794	1	1	0.835	0.768	0.900
Dの効率値	1	1	1	1	1	1	1
Eの効率値	0.898	0.972	0.913	0.947	0.977	0.968	0.946
Fの効率値	0.523	0.883	0.648	0.784	0.906	0.867	0.769

クロス効率性行列でも、Dが最良のDMUと判断された。

しかし、効率値に対するウエイトは提供されない。

6．　まとめ

本研究ではDEA,MCDEAより識別能力を高めたMCDEA＋αモデルを提案した。

- MCDEA+αによって、最良のDMUを特定することが出来た。よって、MCDEA+αは模範的なDMUを１つ産出したい場合に有効である。

<u>今後の課題</u>

- MCDEA,MCDEA+αの前提

「入出力の活動バランスが他のDMUとかけ離れていないものの中で、効率の良いものが良い事業体である」

の妥当性の検討。

7． 参考文献

[1]刀根　薫:「経営効率性の測定と改善」
日科技連出版社、1993

[2]Xiao-Bai Li,Gary R.Reeves:
「A multiple criteria approach to date envelopment analysis」
European Journal of Operation Research,115,596-607,1999.

[３]谷本　泰映：
「分権型組織における効率評価モデルの提案‐カンパニー制組織へのDEAの適用‐」
東京理科大学，修士（工学）学位請求論　文，2001.

[４]多目的計画：http://lecture.ecc.u-toukyo.ac.jp/okuta/planning/60multiobj.html

8．付録(1)

Sexton らは，DMU_0 によって測定される DMU_j の効率値をクロス効率値 E_{jo} とし，以下のような式で定義している．

クロス効率値

$$Ejo = \frac{\sum_{r=1}^{k} uroYrj}{\sum_{i=1}^{m} vioXij} \qquad (j = 1, \cdots, n; o = 1, \cdots, n)$$

8．付録(2)

このクロス効率値 E_{jo} は，分数計画問題の制約式の左辺の値に相当するものである．そして，E_{jo} が $o = j$ のとき，従来の DEA の D 効率値になる．

また，クロス効率値を要素として，$n \times n$ 行列の行列形式で表現したものがクロス効率性行列である．

クロス効率性行列

$$E = \left[Ejo \right] \qquad (j = 1, \cdots, n ; o = 1, \cdots, n)$$