

固定費用の割り当てに関する DEA アプローチ

大塚 和幸 (沼田 一道 助教授)

1. はじめに

多くの企業は同種の活動を行う多数の支店(事業体)に分かれて活動している。そのような企業において各事業体に明確に対応付けられない費用(固定費用)が発生することがしばしばある。例えば、外食チェーンレストランのキャンペーン費用などである。この固定費用を各事業体に割り当てる方法についてはこれまで様々な研究が行われてきている[1]。本研究では、比率尺度(出力/入力)により事業体の効率性を相対比較する手法である DEA (Data Envelopment Analysis) [2]を用いて固定費用の割り当てを行う方法[3]を取り上げる。

[3]は、従来の DEA (各事業体ごとに最も有利なウェイトを用い、比率尺度を個々に最大化する)と等価な“平均効率の最大化を目標とする DEA”を導入し、ウェイトの共通化を通して固定費用を各事業体に対し公平に割り当てる方法を提案している。しかし、この方法は原則の1つである“全事業体に共通なウェイトを用いる”という原則に終始しきれていない。そこで、本研究では最後まで共通なウェイトを用いて、事業体に対し公平性を保ちつつ固定費用を割り当てる方法を提案する。

2. 公平な割り当て

本研究では[3]を土台として各事業体に固定費用を公平に割り当てる方法を提案することを目標とする。[3]においては、固定費用の割り当て幅に対し、可能な限り同じ割合で割り当てるのが公平であると考えている。本研究では、入・出力項目を考慮した上で、各事業体に割り当てる費用の差を可能な限り小さくすることを考える。

3. DEA の概要

DEA は多入力・多出力データからなる比率尺度を用いて、各事業体の効率性を相対比較する評価方法である。DEA の分析において、分析対象を一般に DMU (Decision Making Unit) と呼び、各 DMU は複数の入力から複数の出力を産出していると仮定する。以下のように記号を定義する。

n : DMU の総数 p : DMU の番号を表す添え字 t : 入力項目数 s : 出力項目数

i : 出力項目の添え字 y_i : 出力値 j : 入力項目の添え字 x_j : 入力値

α : 出力にかかるウェイト β : 入力にかかるウェイト

複数個の入力値、出力値にそれぞれウェイトをかけることで、仮想的入力と仮想的出力を作る。さらに「仮想的出力/仮想的入力」を尺度とし、全 DMU のこの尺度を 1 以下に抑えたうえで、測定対象の DMU の尺度 (θ) を最大化するようなウェイト (α, β) を求める分数計画問題を解く。このウェイトは対象とする DMU 毎に θ を最大化する値である。また、この分数計画問題の目的関数の分子を 1 に固定することで、等価な線形計画問題に書き換えることが可能である。

4. DEA を用いた固定費用の割り当て

本研究で土台とする固定費用の割り当て方法[3]は 2 つの原則に従い、4 つのステップで成り立つ

ている。原則1は、“各 DMU の比率尺度の平均(または総和)を最大化する”という原則である。この原則1は、従来の DEA と数学的に等価である。また、従来の DEA では各 DMU 毎に最も有利なウエイトを個々に用いて最大化を行ったが、[3]では全 DMU に共通なウエイトを用いて最大化を行う。このウエイトの共通化が原則2である。原則1に原則2を加えた考え方が[3]の土台となっている。これらをつまみ、以下のステップ1~4を行う。

ステップ1: 全 DMU に共通なウエイトを用い、各 DMU の比率尺度の平均を最大化するように固定費用の割り当てを決める

ステップ1において、目的関数である平均効率の最適値は一意に定まるが、その効率値を構成している入力項目の1つである固定費用は一意に定まらない。つまり、各 DMU 毎にそれぞれ割り当てる固定費用には、柔軟性(幅)が存在する可能性がある。

そこで、ステップ1の結果をもとに、平均効率を最適値に固定したまま、固定費用に柔軟性があるかどうかを調べる必要がある。この作業をステップ2で行う。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximize } \sum_{p=1}^n e_p / n \quad \dots (1) \\ \text{sub to } e_p = (\sum_{i=1}^s \alpha_i y_{ip}) / (\sum_{j=1}^t \beta_j x_{jp} + f_p) \quad \dots (2) \\ \quad \quad \quad (p=1, \dots, n) \\ \sum_{p=1}^n f_p = F \quad \dots (3) \\ f_p = F_p, \quad (\forall p \in S) \quad \dots (4) \\ f_p \geq 0 \quad (p=1, \dots, n) \quad \dots (5) \\ 0 \leq e_p \leq 1 \quad (p=1, \dots, n) \quad \dots (6) \\ \alpha_i \geq \varepsilon \quad (i=1, \dots, s) \quad \dots (7) \\ \beta_j \geq \varepsilon \quad (j=1, \dots, t) \quad \dots (8) \end{array} \right.$$

f_p : DMU_pに割り当てる固定費用
 e_p : DMU_pの効率値 F : 総固定費用額

ステップ2: ステップ1での目的関数を最適値に固定し、固定費用に柔軟性が存在するか調べる

ステップ2の結果として各 DMU に $L_p \leq f_p \leq U_p$ (L_p, U_p はそれぞれ、DMU_pに割り当てうる固定費用の最小値と最大値)という柔軟性(幅)が生じる。しかし、もし各 DMU が一定のルールなしに取りうる範囲内で個々に固定費用を割り当ててしまえば、固定費用の合計値を満たさなくなる可能性や、公平性を欠く可能性が生じることになる。そこで、ステップ2で生じた各 DMU の固定費用の幅に対し、できるだけ同じ割合で割り当てることを目指すことにする。この作業をステップ3で行う。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximize } f_q \\ \text{sub to } \sum_{p=1}^n e_p / n = E^* \\ \quad \quad \quad \text{Eqs. (2)~(8)} \\ \\ \text{minimize } f_q \\ \text{sub to } \sum_{p=1}^n e_p / n = E^* \\ \quad \quad \quad \text{Eqs. (2)~(8)} \end{array} \right.$$

E^* : 最大化した平均効率の最適値

ステップ3: 各 DMU の固定費用の割り当てうる幅に対し、実際に割り当てる割合の差を、全 DMU の間で可能な限り小さく抑える

ステップ3では、本研究の目的でもある“公平性”に焦点を当てている。ステップ2で生じた固定費用の割り当て幅に対し、実際に割り当てる割合の差を全 DMU 間で最小化することにより、各 DMU の公平化を図る。さらに、この目的関数を最適値に固定したまま、固定費用にさらなる幅が存在するかを確認する。この作業をステップ4で行う。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimize } P_{\max} - P_{\min} \quad \dots (9) \\ \text{sub to } P_{\max} \geq (f_q - L_q) / (U_q - L_q) \\ \quad \quad \quad (q=1, \dots, n) \quad q \notin S \quad \dots (10) \\ P_{\min} \leq (f_q - L_q) / (U_q - L_q) \\ \quad \quad \quad (q=1, \dots, n) \quad q \in S \quad \dots (11) \\ \text{Eqs. (3)~(9)} \quad \sum_{p=1}^n e_p / n = E^* \quad \dots (12) \\ P_{\max} \cdot P_{\min} \geq 0 \quad \dots (13) \end{array} \right.$$

P_{\max} : 幅に対して割り当てる割合の最大値
 P_{\min} : 幅に対して割り当てる割合の最小値

ステップ4：各DMUの固定費用の割り当てうる幅に対し、実際に割り当てる割合の差を全DMU間で最小化した条件下、割り当てる固定費用にさらなる柔軟性（幅）が存在するかを調べる

通常、このステップ4において、さらなる柔軟性は各DMUにも存在しない。もし、 $L_p < f_p < U_p$ という柔軟性が残るDMU_qが存在する場合、 $f_p = (L_p + U_p) / 2$ という値でDMU_qの固定費用の割り当て額を固定した条件下、もう1度、ステップ2からステップ4まで同じ作業を行う。これを、柔軟性が残るDMUがなくなるまで繰り返す。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{maximize} & f_q \\ \text{sub to} & P_{\max} - P_{\min} = P^* \\ & \text{Eqs. (10) ~ (13)} \\ \text{minimize} & f_q \\ \text{sub to} & P_{\max} - P_{\min} = P^* \\ & \text{Eqs. (10) ~ (13)} \end{array} \right.$$

P^* : ステップ3の目的関数の最適値

5. 提案する方法

割り当て方法[3]は2つの原則に従い固定費用の割り当てを行っていくのだが、ステップ2における各DMUの柔軟性（幅）を求めるという作業が、実は、原則2（全DMUに共通なウエイトを用いる）に基づいていないのである。ステップ2では、ステップ1で求めた平均効率を最適値に固定したまま、割り当てる固定費用の最大値と最小値を各DMUで個々に求めている。つまり、これらの値を求める際に、それぞれ別々のウエイトを用いているのである。これは原則2に反する。ステップ3以降もこの別々のウエイトで求めた幅を用いて考えているため、最終的に割り当てられる固定費用も共通なウエイトを用いて求めた値ではないと考えることができる。

そこで、本研究では最後まで全DMUに共通なウエイトを用い、各DMUに対して公平に固定費用を割り当てる方法を提案する。本研究における原則は、割り当て方法[3]と同様の2つの原則に従うが、2つのステップで固定費用を割り当てていく。ステップ1は、割り当て方法[3]とまったく同様に、全DMUに共通なウエイトを用い、各DMUの比率尺度の平均を最大化するように固定費用の割り当てを決める。その後、ステップ1の結果を用いて以下のステップ2を行う。

ステップ2：各DMUの比率尺度の平均を最適値に固定し、各DMU間に割り当てる固定費用の差を最小化する

ステップ2では、ステップ1で求めた平均効率を最適値に固定したまま、各DMUに割り当てる固定費用の差を可能な限り小さくする。割り当てる固定費用の差を最も小さくするためには総固定費用額をDMUの数で割れば、全DMUに同額が割り当てられる。しかし、これでは入・出力項目を全く考慮していないことになるので、平均効率値を最適値に固定することで、入・出力項目を考慮した割り当てにする。また、この割り当て方法は、共通なウエイトを用いるという原則にも従っている。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimize} & f_{\max} - f_{\min} \\ \text{sub to} & f_{\max} \geq f_q \quad (q=1, \dots, n) \\ & f_{\min} \leq f_q \quad (q=1, \dots, n) \\ & \sum_{p=1}^n e_p / n = E^* \\ & \text{Eqs. (3) ~ (9)} \end{array} \right.$$

f_{\max} : 全DMUで割り当てる費用の最大値

f_{\min} : 全DMUで割り当てる費用の最小値

6. 適用例と実験結果

日本プロ野球機構が野球人気獲得のためにキャンペーンを張ることになり、その費用を各球団にどのように分配したらよいかという問題を取り上げる。適用した数値例（表1）は、[4]をもとに、日

本プロ野球 12 球団を DMU とし、入力 1 を 1 軍選手平均年俸、入力 2 を過去 3 年のベストナイン・ゴールデングラブ賞の合計人数、入力 3 を過去 3 年のオールスター選出合計人数、出力 1 を年間平均観客数、出力 2 を 2003 年シーズン勝利数としたものである。表 2 は Lingo8 を用いて [3] と本研究による固定費用の割り当て

表1 適用した数値例

DMU	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
入力1	1042	540	653	681	540	606	478	685	586	505	456	448
入力2	60	28	52	18	8	14	44	50	32	20	12	30
入力3	12	12	2	3	1	1	12	10	6	3	2	3
出力1	538	432	251	325	128	213	454	221	192	184	102	158
出力2	71	87	71	73	67	45	82	77	74	62	68	48

表2 実験結果

DMU	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
割り当て方法[3]	9.36	16.23	6.68	12.03	6.84	5.70	15.73	3.85	6.20	7.07	6.35	3.96
本研究の割り当て方法	7.26	9.48	9.41	9.48	9.07	6.03	8.79	8.52	8.97	7.95	9.00	6.01

を行った結果である。固定費用の総額は 100 とした。その結果、[3] で割り当てられた DMU の中で最も多く固定費用を割り当てられたのは DMU 2 であり、最も少なく割り当てられたのが DMU 8 であり、その差は 12.38 となった。また、本研究においては、最も多く割り当てられたのが DMU 2 と 4、最も少なく割り当てられたのが DMU 12 で、その差が 3.47 となった。

7. 考察およびまとめ

本研究は、共通なウエイトを用いて全 DMU の平均効率を最大化（入・出力を考慮）したうえで、各 DMU に対し割り当てる固定費用の差を可能な限り小さくする方法を提案している。数値例を用いた実験の結果、[3] による固定費用の差 (12.38) に比べ、本研究の割り当て方法による固定費用の差 (3.47) の方が小さく抑えられているという結果が得られた。本研究は、全 DMU の平均効率の最大化を考えたうえで、各 DMU に対し固定費用の差を小さくすることが公平であると考えているので、この結果は本研究の目的を達成しているといえる。次に、本研究の妥当性についてであるが、各 DMU の平均効率（出力/入力）を最適値の 1 にするためには、固定費用以外の入力値が小さく、出力値が大きい DMU に対し、より多くの固定費用が割り当てられるはずである。実験結果を見てみると、固定費用が多く割り当てられている DMU は、入力値が比較的小さいか、出力値が比較的大きくなっており、少なく割り当てられている DMU は、入力値が比較的大きいか、出力値が比較的小さくなっている。この結果から、本研究の割り当て方法は妥当であると考えられる。

しかし、今回比較検討した 2 つの割り当て方法は公平性の考え方が異なる。したがって、取り上げた問題に即した公平性を考慮した割り当て方法を考える必要があると思われるが、それは今後の課題である。

参考文献

- [1] 宮本 一典：共通費用の公平な分配の方法についての考察—DEA によるアプローチ—，平成 13 年度東京理科大工学部経営工学科卒業論文。
- [2] 利根 薫：経営効率性の測定と改善—包絡分析法 DEA による—，日科技連，1993。
- [3] J.E.Beasley：Allocating fixed costs and resources via data envelopment analysis, European Journal of Operational Research, Vol.147, 198-208, 2003.
- [4] プロ野球データ集：http://www.sanspo.com/baseball/data/data.html