固定費用の割り当てに関する DEAアプローチ

東京理科大工学部経営工学科

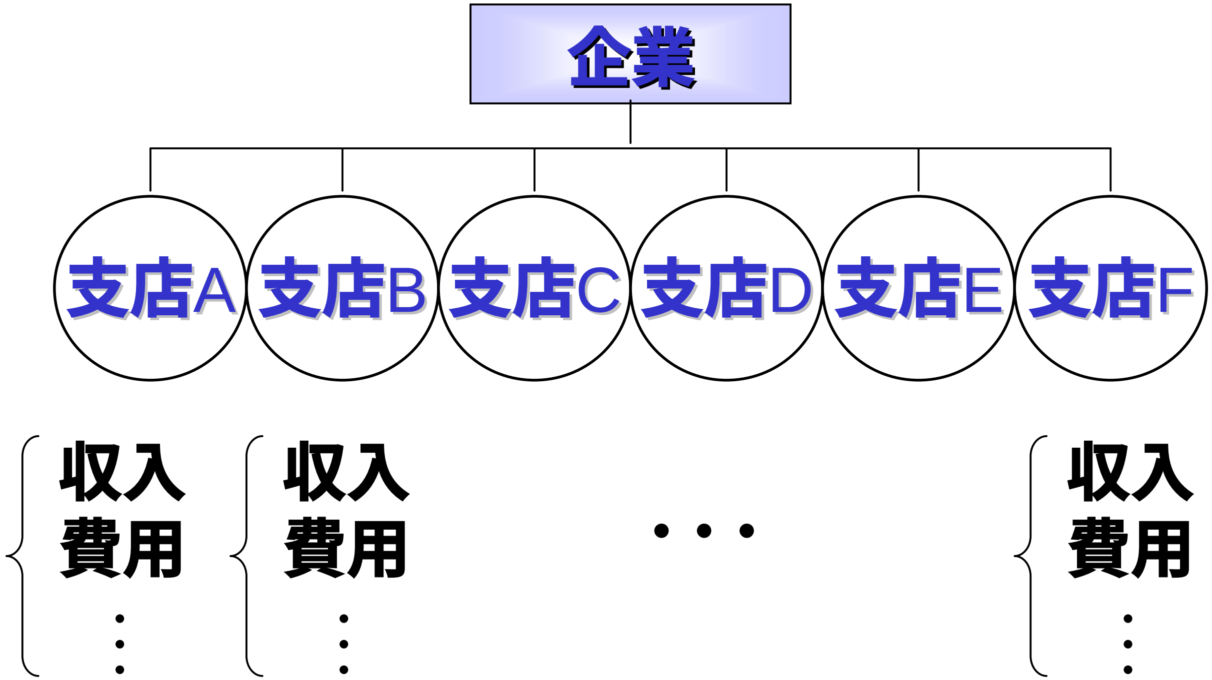
沼田研究室

４４０００２９　　大塚　和幸

発表構成

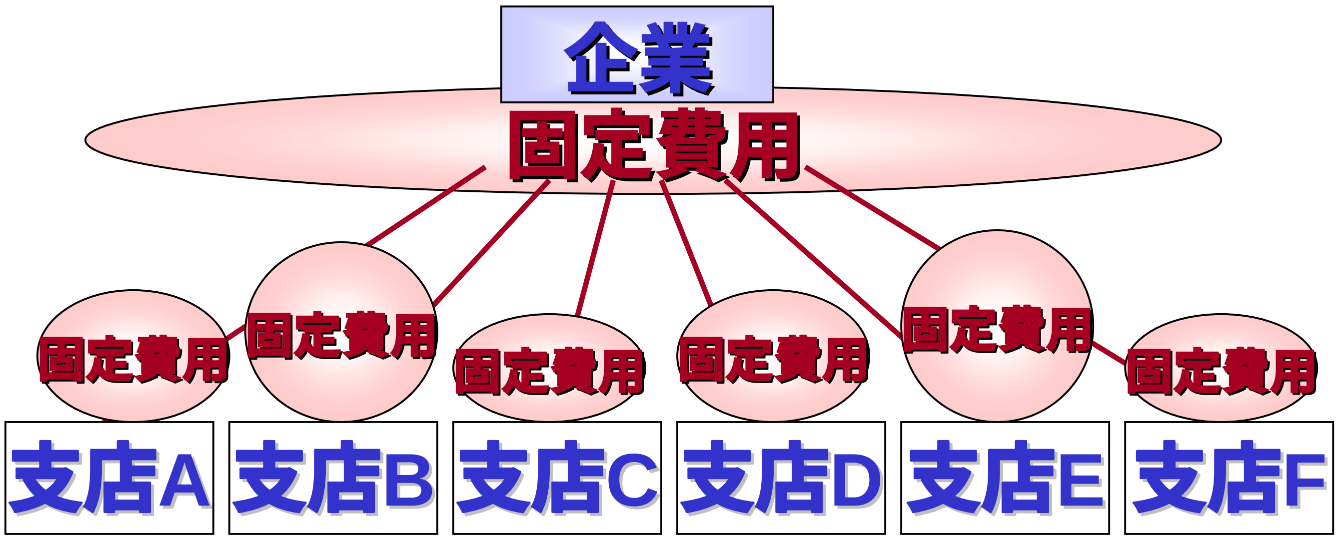
1. はじめに

・多くの企業は同種の活動を行う多数の支店（事業体）に分かれて活動している。



1. はじめに

・各支店に明確に対応付けられない費用（**固定費用**）が発生することがしばしばある。



2．本研究の目的

固定費用の<u>**公平な**</u>割り当て方法の提案

既存研究[1]
(割り当て方法[A]とする)

提案方法

・[A]の問題点を改善

・[A]とは異なった公平性を用いる

3. DEAについて

- DEAは各事業体（DMU）の効率性を**比率尺度**を用いて相対比較する手法である。

$$\text{比率尺度} = \frac{\text{産出}}{\text{投入}}$$

DMU1
入力項目 A_1
入力項目 B_1
入力項目 C_1
出力項目 D_1
出力項目 E_1

・・・

DMUo
入力項目 A_0
入力項目 B_0
入力項目 C_0
出力項目 D_0
出力項目 E_0

・・・

DMUn
入力項目 A_n
入力項目 B_n
入力項目 C_n
出力項目 D_n
出力項目 E_n

比率尺度

$$\frac{\delta_0 D_1 + \varepsilon_0 E_1}{\alpha_0 A_1 + \beta_0 B_1 + \gamma_0 C_1} \le 1 \quad \cdots \quad \frac{\delta_0 D_0 + \varepsilon_0 E_0}{\alpha_0 A_0 + \beta_0 B_0 + \gamma_0 C_0} \quad \cdots \quad \frac{\delta_0 D_n + \varepsilon_0 E_n}{\alpha_0 A_n + \beta_0 B_n + \gamma_0 C_n} \le 1$$

↓

最大化

4. DEAを用いた固定費用の割り当て

$$
\langle P \rangle \quad
\begin{cases}
\max & e_p & (p = 1, \cdots, n) \\
\text{Sub.to.} & \boxed{e_p = \left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i y_{ip}\right) / \left(\sum_{j=1}^{t} \beta_j x_{jp} + f_p\right)} & (p = 1, \cdots, n) \\
 & 0 \le e_p \le 1 & (p = 1, \cdots, n) \\
 & \alpha_{ip} \ge \varepsilon & (i = 1, \cdots, s) \\
 & \beta_{jp} \ge \varepsilon & (j = 1, \cdots, t)
\end{cases}
$$

比率尺度

固定費用

・各DMUで，この比率尺度を最大化する分数計画問題を考える。

4．1　割り当て方法[A]の概要

・[A]は以下の2つの原則に従い、4つのステップで固定費用を割り当てる。

原則1

・各DMUの比率尺度の平均（または総和）を最大化する

原則2

・全DMUに共通のウエイトを用いる

4．1　割り当て方法[A]の概要

原則1

各DMUの比率尺度をそれぞれ最大化する

各DMUの比率尺度の平均を最大化する

＜P＞

Max $e_p \quad (p=1,\cdots,n)$

Sub to

$$e_p = \left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i y_{ip}\right) / \left(\sum_{j=1}^{t} \beta_j x_{jp} + f_p\right)$$
$$(p=1,\cdots,n)$$
$$0 \le e_p \le 1 \quad (p=1,\cdots,n)$$
$$\alpha_{ip} \ge \varepsilon \quad (i=1,\cdots,s)$$
$$\beta_{jp} \ge \varepsilon \quad (j=1,\cdots,t)$$

分数計画問題をn回解く

＜Q＞

Max $\sum_{p=1}^{n} e_p / n$

Sub to

$$e_p = \left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i y_{ip}\right) / \left(\sum_{j=1}^{t} \beta_j x_{jp} + f_p\right)$$
$$(p=1,\cdots,n)$$
$$0 \le e_p \le 1 \quad (p=1,\cdots,n)$$
$$\alpha_i \ge \varepsilon \quad (i=1,\cdots,s)$$
$$\beta_j \ge \varepsilon \quad (j=1,\cdots,t)$$

原則2

全DMUで共通なウエイトを用いる

ステップ1

全DMUに共通なウエイトを用い、全DMUの比率尺度の平均を最大化するように固定費用を割り当てる

$$
\begin{cases}
\max \quad \sum_{p=1}^{n} e_p / n & \cdots(2) \\
\text{Sub.to.} \quad e_p = \left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i y_{ip}\right) / \left(\sum_{j=1}^{t} \beta_j x_{jp} + f_p\right) & \\
\qquad (p = 1, \cdots, n) & \cdots(3) \\
\sum_{p=1}^{n} f_p = F & \cdots(4) \\
f_p = F_p \quad (\forall p \in S) & \cdots(5) \\
f_p \geq 0 \quad (p = 1, \cdots, n) & \cdots(6) \\
0 \leq e_p \leq 1 \quad (p = 1, \cdots, n) & \cdots(7) \\
\alpha_i \geq \varepsilon \quad (i = 1, \cdots, s) & \cdots(8) \\
\beta_j \geq \varepsilon \quad (j = 1, \cdots, t) & \cdots(9)
\end{cases}
$$

F ：総固定費用額

α_i ：出力にかかるウエイト

β_j ：入力にかかるウエイト

ステップ1で考慮すべき点

・比率尺度を構成する要素（固定費用）は一意に定まらない・・・

例えば、

$$比率尺度 = \frac{出力}{入力} = 1 = \frac{\alpha_1 \times 1.2}{\beta_1 \times 0.8 + 0.9} = \frac{\alpha_2 \times 1.2}{\beta_2 \times 0.8 + 1.1}$$

入力項目の1つと考えている固定費用には柔軟性（幅）が存在する可能性がある。

ステップ2

ステップ1での目的関数を最適値に固定し、固定費用に柔軟性（幅）が存在するかを調べる

$$\left\{\begin{array}{lll} \max & f_q \quad (q=1,\cdots,n) & \Rightarrow U_q \text{ とする} \\ \text{Sub.to.} & \sum_{p=1}^{n} e_p / n = E^* & \\ & Eqs.(3)\sim(9) & \\ \min & f_q \quad (q=1,\cdots,n) & \Rightarrow L_q \text{ とする} \\ \text{Sub.to.} & \sum_{p=1}^{n} e_p / n = E^* & \\ & Eqs.(3)\sim(9) & \end{array}\right.$$

ステップ1の制約式

E^*：最大化した全DMUの平均効率の最適値

割り当てる固定費用の柔軟性（幅）

・**一定のルール**なしに取りうる範囲内（$L_q \le f_q \le U_q$）で個々に固定費用を割り当てると

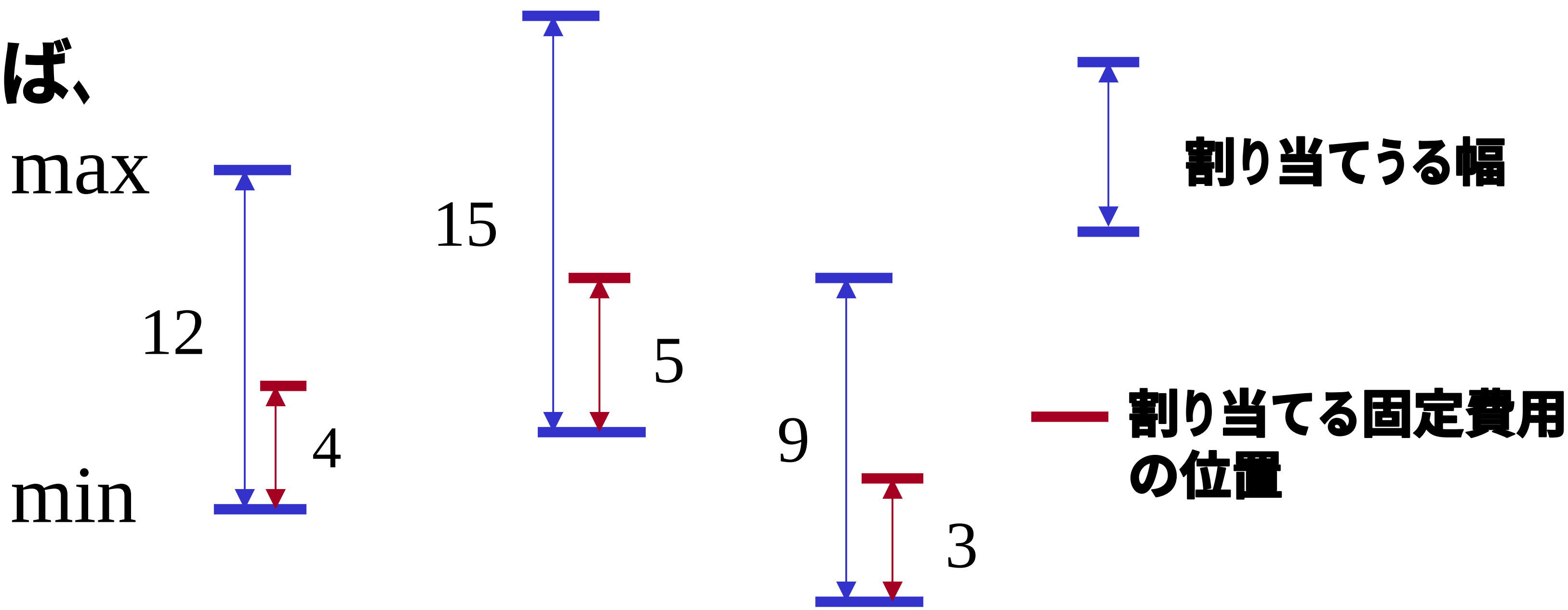
⇒ 総固定費用額Fを満たさなくなる・・・
公平性を欠く可能性がある・・・

各DMUに**公平に割り当てるためのルール**を作る。

公平に割り当てるためのルール

各DMUの固定費用の割り当てうる幅に対し、**実際に割り当てる割合**の差を、全DMUの間で可能な限り小さくする

例えば、



この例の場合、**実際に割り当てる割合**は0.33となる

ステップ3

各DMUの固定費用の割り当てうる幅に対し、**実際に割り当てる割合**の差を、全DMUの間で可能な限り小さくする

$$\begin{cases} \min \quad P_{\max} - P_{\min} & \cdots(11) \\ \text{Sub.to.} \quad P_{\max} \geq (F_q - L_q)/(U_q - L_q) \quad (q = 1, \cdots, n) \quad q \notin S & \cdots(12) \\ P_{\min} \leq (F_q - L_q)/(U_q - L_q) \quad (q = 1, \cdots, n) \quad q \notin S & \cdots(13) \\ Eqs.(3) \sim (9) & \cdots(14) \\ P_{\max},\ P_{\min} \geq 0 \quad \sum_{p=1}^{n} e_p / n = E^* & \cdots(15) \end{cases}$$

ステップ1の制約式

ステップ4

ステップ3の目的関数を最適値に固定したまま

各DMUの固定費用の割り当てうる幅に対し、実際に割り当てる割合の差を最小化した条件のもと、割り当てる固定費用にさらなる柔軟性が存在するかを調べる

$$
\begin{cases}
\max & f_q \quad (q=1,\cdots,n) \\
\text{Sub.to.} & P_{\max} - P_{\min} = P^* \\
 & Eqs.(12)\sim(15) \\
\min & f_q \quad (q=1,\cdots,n) \\
\text{Sub.to.} & P_{\max} - P_{\min} = P^* \\
 & Eqs.(12)\sim(15)
\end{cases}
$$

ステップ3の制約式

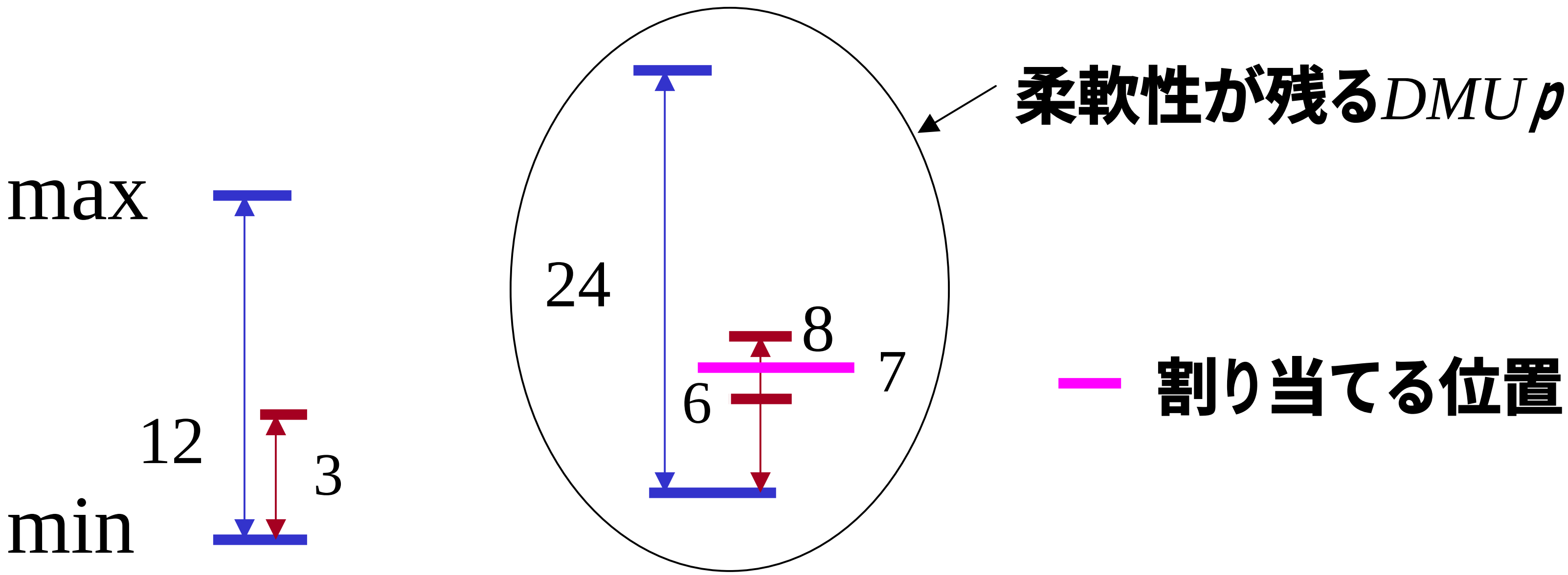
P^*：ステップ3の目的関数の最適値

ステップ４以降の作業

もし、 $L_q \leq f_q \leq U_q$ という幅が残る*DMU p*が存在したら、

$$\boxed{f_p = (L_p + U_p)/2}$$

という値で割り当てる。



割合　０．２５　　０．３３

4．2　提案する新しい割り当て方法

既存研究[1]
(割り当て方法[A])

提案方法

- [A]の問題点を改善
- [A]とは異なった公平性を用いる

[A]の問題点

ステップ2：各DMUで割り当て幅を求める

DMU1

Max f_1
Sub to $\sum_{p=1}^{n} e_p / n = E^*$
$Eqs.(3) \sim (9)$

Min f_1
Sub to $\sum_{p=1}^{n} e_p / n = E^*$
$Eqs.(3) \sim (9)$

・・・

DMU n

Max f_n
Sub to $\sum_{p=1}^{n} e_p / n = E^*$
$Eqs.(3) \sim (9)$

Min f_n
Sub to $\sum_{p=1}^{n} e_p / n = E^*$
$Eqs.(3) \sim (9)$

・・

各DMUで個々にウエイトを求める問題を解いている。

[A]の問題点

ステップ1

全DMUの平均効率を最大化する
（1回の分数計画問題を解く）

⇒ 共通なウエイトを用いている

ステップ2

割り当て幅（最大値・最小値）を求める
（n×2回の数理計画問題を解く）

⇒ 別々なウエイトを用いている

ステップ3

幅に対し公平に割り当てる

ステップ4

さらなる幅の確認

原則2に終始していない

提案する割り当て方法の概要

最後まで共通なウエイトを用い、各DMUに対し公平性を保ちつつ固定費用を割り当てる方法

- [A]同様の原則2つに従うが、2つのステップで固定費用を割り当てる
- 提案する方法のステップ1は[A]と全く同じステップ1を用いることにする

本研究の公平性

ステップ1

全DMUの比率尺度の平均を最適値に固定した上で、各DMUへ割り当てる費用の差を小さくすること

ステップ2

各DMUの比率尺度の平均を最適値に固定し、各DMUに割り当てる固定費用の差を最小化する

$$
\begin{cases}
\min & f_{\max} - f_{\min} \\
\text{Sub.to.} & f_{\max} \geq f_q \quad (q = 1, \cdots, n) \\
 & f_{\min} \leq f_q \quad (q = 1, \cdots, n) \\
 & \sum_{p=1}^{n} e_p / n = E^* \\
 & Eqs.(3) \sim (9)
\end{cases}
$$

ステップ1の制約式

f_{max}：全DMUで割り当てる費用の最大値

f_{min}：全DMUで割り当てる費用の最小値

5．適用例を用いた実験と実験結果

表1　適用例での数値

DMU	入力1	入力2	入力3	出力1	出力2
1(G)	1042	60	12	538	71
2(T)	540	28	12	432	87
3(YS)	653	52	2	251	71
4(D)	681	18	3	325	73
5(C)	540	8	1	128	67
6(YB)	606	14	1	213	45
7(DH)	478	44	12	454	82
8(L)	685	50	10	221	77
9(Bu)	586	32	6	192	74
10(F)	505	20	3	184	62
11(M)	456	12	2	102	68
12(Bw)	448	30	3	158	48

１軍選手平均年俸

過去3年のオールスター選出人数

過去3年のベストナイン・ゴールデングラブ賞の合計数

年間平均観客数

2003シーズン勝ち数

実験結果

表2　割り当て結果

12.38

DMU	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
割り当て方法[A]	9.36	16.23	6.68	12.03	6.84	5.70	15.73	3.85	6.20	7.07	6.35	3.96
本研究の割り当て方法	7.26	9.48	9.41	9.48	9.07	6.03	8.79	8.52	8.97	7.95	9.00	6.01

3.47

6．考察

・提案方法の妥当性

大きい値

比率尺度（＝1） ＝ $\dfrac{\boxed{出力1} + \boxed{出力2}}{\boxed{入力1} + \boxed{入力2} + \boxed{入力3} + \boxed{固定費用}}$

小さい値

大きい値

表3　入･出力データと割り当て額

DMU	入力1	入力2	入力3	割り当て額	出力1	出力2
1(G)	1042	60	12	7.26	538	71
2(T)	540	28	12	9.48	432	87
3(YS)	653	52	2	9.41	251	71
4(D)	681	18	3	9.48	325	73
5(C)	540	8	1	9.07	128	67
6(YB)	606	14	1	6.03	213	45
7(DH)	478	44	12	8.79	454	82
8(L)	685	50	10	8.52	221	77
9(Bu)	586	32	6	8.97	192	74
10(F)	505	20	3	7.95	184	62
11(M)	456	12	2	9.00	102	68
12(Bw)	448	30	3	6.01	158	48

7．まとめ

・本研究では，各事業体に固定費用を公平に割り当てる新しい方法を提案し、適用例を用いた実験結果をもとに、その提案方法の妥当性を検討した。

公平性の違い

割り当て[A]

固定費用の割り当て幅に対し，**可能な限り同じ割合で割り当てる**こと

提案方法

入･出力項目を考慮した上で、各DMUへ**割り当てる費用の差を小さくする**こと

取り上げた問題に即した公平性を考慮した割り当て方法を考える必要がある。

参考文献

［1］ J.E.Beasley： Allocating fixed costs and resources via data envelopment analysis, European Journal of Operational Research , Vol.147, 198-208, 2003.

［2］ 利根　薫：経営効率性の測定と改善－包絡分析法DEAによる－，日科技連，1993.

［3］ 宮本　一典： 共通費用の公平な分配の方法についての考察ーDEAアプローチー，平成１３年度東京理科大工学部経営工学科卒業論文

［4］ プロ野球データ集：
http://www.sanspo.com/baseball/data/data.html

付録

ウエイトの値

ステップ1

α1	0.075476
α2	0.323172
β1	0.049233
β2	0.000001
β3	0.783988

ステップ2

f1max	19.56245	f2max	30.6171	f3max	16.18282	f4max	16.79564
α1	0.082941	α1	0.094044	α1	0.017676	α1	0.020251
α2	0.000001	α2	0.199700	α2	0.225322	α2	0.258145
β1	0.013926	β1	0.045613	β1	0.000001	β1	0.000001
β2	0.175819	β2	0.098312	β2	0.000001	β2	0.441435
β3	0.000001	β3	0.000001	β3	2.125553	β3	0.228020

f1min	0	f2min	1.732016	f3min	0	f4min	7.986396
α1	0.067749	α1	0.017676	α1	0.053457	α1	0.000001
α2	0.365726	α2	0.225322	α2	0.341135	α2	0.300264
β1	0.048433	β1	0.000001	β1	0.033103	β1	0.020460
β2	0.060209	β2	0.000001	β2	0.308109	β2	0.000001
β3	0.694607	β3	2.125553	β3	0.000001	β3	0.000001

ステップ2

f5max	16.12782	f6max	11.77833	f7max	32.94258	f8max	9.333225
α 1	0.020251	α 1	0.017676	α 1	0.094044	α 1	0.000001
α 2	0.258145	α 2	0.225322	α 2	0.199700	α 2	0.121218
β 1	0.000001	β 1	0.000001	β 1	0.045613	β 1	0.000001
β 2	0.441436	β 2	0.000001	β 2	0.098314	β 2	0.000001
β 3	0.228022	β 3	2.125540	β 3	0.000001	β 3	0.000001

f5min	0	f6min	0	f7min	0.994309	f8min	0
α 1	0.092923	α 1	0.067228	α 1	0.017676	α 1	0.024555
α 2	0.215210	α 2	0.365987	α 2	0.225322	α 2	0.260424
β 1	0.047937	β 1	0.047698	β 1	0.000001	β 1	0.046820
β 2	0.000001	β 2	0.094158	β 2	0.000001	β 2	0.313724
β 3	0.426980	β 3	0.565731	β 3	2.125555	β 3	0.658537

f9max	10.23018	f10max	10.84523	f11max	13.90779	f12max	7.231184
α 1	0.000001	α 1	0.017676	α 1	0.011422	α 1	0.017676
α 2	0.300264	α 2	0.225322	α 2	0.259703	α 2	0.225322
β 1	0.020460	β 1	0.000001	β 1	0.000001	β 1	0.000001
β 2	0.000001	β 2	0.000001	β 2	0.409714	β 2	0.000001
β 3	0.000001	β 3	2.125553	β 3	0.000001	β 3	2.125554

f9min	2.137986	f10min	4.413581	f11min	0	f12min	0.662289
α 1	0.082941	α 1	0.069021	α 1	0.092412	α 1	0.064745
α 2	0.000001	α 2	0.036794	α 2	0.102270	α 2	0.368258
β 1	0.013926	β 1	0.020926	β 1	0.032884	β 1	0.044462
β 2	0.175813	β 2	0.000001	β 2	0.115449	β 2	0.244159
β 3	0.000001	β 3	0.000001	β 3	0.000001	β 3	0.000001

ステップ3

P1－P2	0.08880314
α1	0.037814
α2	0.139391
β1	0.011803
β2	0.084938
β3	0.290374

ステップ2

f1－f2	3.46864
α1	0.000001
α2	0.138748
β1	0.000001
β2	0.000001
β3	0.2158578