

DEA における間接的な領域限定法の提案 CCR モデルの場合

片本 俊輔 葛見 亮平 (沼田 一道 助教授)

1. はじめに

現在、日本の景気は上向きかけてきたといわれているが、厳しい状況であることに変わりはない。そのような中、企業にとって自社の経営効率を評価し改善目標を知ることはますます重要になってきている。企業(事業体)の経営効率を測定する方法はいろいろあるが、同種の活動を行う多数の事業体の中で相対的にかつ各事業体の経営の自由度を認めつつ評価する手法として DEA(Data Envelopment Analysis)が有名である。

効率的な活動とは基本的に「出力/入力」が大きいことである。しかし事業体の入力(出力)は一般に複数の項目から構成されるので、DEA では各項目値に重み(ウェイト)を乗じて加えることによって仮想的入力(出力)を作り、その比を用いて相対的に評価を行う。ところが現実に DEA を用いて評価を行うと、このウェイトがゼロになることがしばしばある。これは実際に存在する項目を無視して評価していることになるので、結果として得られる効率値は現実的なものではない可能性がある。この「入出力項目に乗ずるウェイトがゼロになる」という問題を避けるために、入出力項目のウェイトに対して制限を加える様々な方法が提案されてきている[1]。しかしこれらの方法では項目の測定単位によって効率値が変わってしまうため説得性に欠ける恐れがある。また入出力項目のウェイトに対して制限を加える際の上下限の設定は評価者の主観に左右されしばしば実行不可能になるという問題点もある。そこで本研究では、効率的な活動を行っている事業体に着目し、その事業体の効率値を 1 と固定して、入出力項目に付けるウェイトを間接的に制限する評価法を提案する。

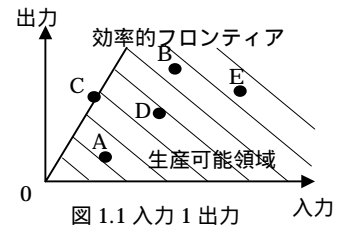
2. DEA の概要 [2]

DEA では評価対象の事業体を DMU(Decision Making Unit)と呼ぶ。この DMU が n 個あるとし、これらを DMU_1, \dots, DMU_n と表記する。各 DMU は同じ環境のもとで m 個の入力から s 個の出力を産出しているとし、 DMU_j の入力値を $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}$ 、出力値を $y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj}$ とする ($j=1, 2, \dots, n$)。評価対象の DMU を DMU_{j_0} とし DMU_{j_0} を評価するときの入力に対するウェイトを v_1, v_2, \dots, v_m 、出力に対するウェイトを u_1, u_2, \dots, u_s とする。

DMU_{j_0} の効率値は (仮想的出力)/(仮想的入力) = $(u_1 y_{1j_0} + \dots + u_s y_{sj_0}) / (v_1 x_{1j_0} + \dots + v_m x_{mj_0})$ で測定される。このウェイトを用いた比率がどの DMU についても 1 以下となるように制限した上で、 DMU_{j_0} の比率を最大にするようにウェイトを決める。そして、このウェイトによる比率を DMU_{j_0} の効率値と定義する。ウェイトを求める問題は分数計画問題であるが、目的関数の分母を 1 に固定することによって等価な線形計画問題(P)に書き換えることができる。このモデルは 1978 年 Charnes-Cooper-Rhodes によって提案され CCR モデルと呼ばれる。線形計画問題に対してはその双対問題(D)を考えることができる。双対問題は生産可能領域の概念を導き、その最適解は非効率な DMU が効率的となるための情報(努力目標)を与える。

$$\begin{array}{l}
 \text{(P)} \left\{ \begin{array}{l}
 \max \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0} \\
 \text{s.t.} \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} = 1 \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \\
 u_r \geq 0 \quad (r=1, 2, \dots, s) \quad v_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \text{(D)} \left\{ \begin{array}{l}
 \min \theta \\
 \text{s.t.} \theta x_{ij_0} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \geq 0 \\
 y_{rj_0} - \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \leq 0 \\
 \lambda_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n)
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

生産可能領域は現存するDMUの活動の凸結合，そのスカラー倍，それより劣る活動の集合である．効率的と考えられるDMUが形成する包絡面境界は効率的フロンティアと呼ばれる．図1において非効率的DMU_{A,B,D,E}が効率的になるために参照すべきDMU_Cを優位集合と呼ぶ．



3. 新しい評価法の提案

CCR モデルを計算した結果，ゼロウェイトが出現することがある．この評価は現実的ではないためこの点を回避するような領域限定法に関する先行研究[1]がある．1986年 Tompson らは，ウェイトの比に制限を加えることによってゼロウェイトの出現を回避しようとしたが，入出力の測定の単位によって効率値が変わるという問題があった．また，1988年 Dyson らは，直接ウェイトに上下限の制限を加え試みたが，上下限の設定の難しさが容易に実行不可能になってしまうという問題があった．1990年 Wong と Beasley は仮想的入出力値に上下限の制限を加え試みたが，多少の改善は見られたもののまだ実行不可能になるという問題が残った．このように項目の測定単位によって効率値が変わってしまうため説得性に欠けるという問題や上下限の設定が困難であるために実行不可能になるといった問題がある．またこれらの先行研究における双対問題では得られた努力目標の解釈も困難である．そこで以上の問題を避けるために効率的な活動を行っている事業体に着目し，その効率値を強制的に1と固定することでウェイトの範囲制限を行うことを試みた．その手順を Step1～3 に示す．

Step 1: CCRモデルの適用

Step 2: 効率的な活動を行いかつ現実的なウェイトを持ったDMU_kに着目(これを模範DMUと呼ぶ)

Step 3: そのDMUの効率値を1に固定する制約式をPに加えて解く

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \max \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_o} \\
 \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_o} = 1 \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad (j=1,2,\dots,n) \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rk} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 0 \\
 u_r \geq 0 \quad (r=1,2,\dots,s) \quad v_i \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m)
 \end{array} \right\} \text{(P)}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \min \quad \theta \\
 \text{s.t.} \quad \theta x_{ij_o} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n x_{ij} \lambda_j - \sum x_{ik} \lambda_k \geq 0 \\
 y_{rj_o} + \sum y_{rk} \lambda_k - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n y_{rj} \lambda_j \leq 0 \\
 \lambda_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,n) \quad \lambda_k : \text{free}
 \end{array} \right\} \text{(D')}
 \end{array}$$

しかし Step3 終了後もゼロウェイトの出現がしばしば見られることもある．そこで Step3 の結果を受けゼロウェイトが残った場合には，新たな模範 DMU を見つけ，その DMU の効率値を1に固定する制約式を加えて解き直す．これを Step4 とする．

Step 4: Step 3 終了後，ゼロウェイトが出現したら再び Step 2 に戻り繰り返す

本研究では以上の Step 1～4 を新しい評価法として提案する．またこの際，双対問題 D' を解くことにより得られる努力目標の解釈は先行研究に比べると容易である．

4. 実験

本研究で新しく提案した評価法と従来の評価法とを比較して検討を行っていく．この際比較のために用いたデータ(表1)は参考文献[2]の中で紹介されているもので，2入力2出力として捉えた14の総合病院である．入力項目は医師・看護婦の総勤務時間数(千時間/月)，出力項目は外来・入院の保険点数(千点/月)である．

表 1.病院のデータ

病院	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
医師	3.008	3.985	4.324	3.534	8.836	5.376	4.982	4.775	8.046	8.554	6.147	8.366	13.479	21.808
看護婦	20.980	25.643	26.978	25.361	40.796	37.562	33.088	39.122	42.958	48.955	45.514	55.140	68.037	78.302
外来	97.775	135.871	133.655	46.243	176.661	182.576	98.880	136.701	225.138	257.370	165.274	203.989	174.270	322.990
入院	101.225	130.580	168.473	100.407	215.616	217.615	167.278	193.393	256.575	312.877	227.099	321.623	341.743	487.539

5. 結果と考察

従来の評価法の結果を表 2 に示す．表 2 より DMU_{2,3,6,8,10}の効率値が 1 となっていることが分かる．そのうちDMU₆に着目してみると,DMU₆は全てのウェイトを持っていることによりバランスよく入出力項目の要素を効率値に反映できていると考えられるので, Step2 としてDMU₆を模範DMUとしStep3 を実行する．その結果を表 3 に示す．

表 2 ではゼロウェイトが 18 個あったが表 3 では 7 個に減ったことが見て取れる．しかし依然としてゼロウェイトが存在してしまっただけでStep4 よりStep2 に戻る．このとき先ほどと同様の理由によりDMU₃を新たな模範DMUとしStep3 を実行する．

さらにその結果より依然としてゼロウェイトが存在しているのでStep4 に移る．このときDMU₁₀に対しても同様のことがいえるので, DMU₁₀を新たな模範DMUとしStep3 を実行する．その結果を表 4 に示す．

DMU_{3,6,10}の効率値を 1 に固定することで, 表 4 から分かるようにゼロウェイトが無くなった．このことより, 従来の評価法に比べてすべての病院がバランスよくウェイトを持っていることが分かる．従来の評価法では入力項目の医師と出力項目の外来を無視した評価が多かったのに対し, 新しい評価法はそれぞれの項目を考慮した現実的な評価が行われたと考えられる．

図 2 に表 2, 4 の効率値の推移を表したグラフを示す．従来の評価法で得た効率値(表 2)と本研究で提案した新しい評価法で得た効率値(表 4)を比較すると, いずれの病院も効率値は維持または低下しているが, これは制約式の数を増やしてウェイトの領域を限定したのであるから当然であり, より「現実的」な評価値であると考えられる．また表 5 に新たに提案したモデルの双対問題を解いた結果を示す．

表 2.従来の DEA

病院	効率値	v1	v2	u1	u2
1	0.955	0.33245	0	0.0095899	0.000167
2	1	0	0.038997	0.0073599	0
3	1	0.06008	0.027438	0	0.005936
4	0.702	0.28204	0.000128	0	0.006990
5	0.827	0	0.024512	0	0.003835
6	1	0.07356	0.016095	0.0040202	0.001222
7	0.844	0.13276	0.010234	0	0.005046
8	1	0.20865	0.000095	0	0.005171
9	0.995	0	0.023279	0.0042631	0.000136
10	1	0	0.020427	0	0.003196
11	0.913	0.16213	0.000074	0	0.004018
12	0.969	0.07926	0.006110	0	0.003013
13	0.786	0	0.014698	0	0.002300
14	0.974	0	0.012771	0	0.001998

表 3.新提案(DMU6 を 1 に固定)

病院	効率値	v1	v2	u1	u2
1	0.955	0.33245	0	0.0095899	0.000167
2	1	0.10421	0.022802	0.0056956	0.001732
3	1	0.10392	0.020411	0.0033885	0.003248
4	0.702	0.28204	0.000128	0	0.006990
5	0.745	0.05630	0.012319	0.0030769	0.000936
6	1	0.07356	0.016095	0.0040202	0.001222
7	0.844	0.13276	0.010234	0	0.005046
8	1	0.20865	0.000095	0	0.005171
9	0.950	0.05732	0.012542	0.0031328	0.000953
10	1	0.05191	0.011357	0.0028369	0.000863
11	0.913	0.16213	0.000074	0	0.004018
12	0.969	0.07926	0.006110	0	0.003013
13	0.694	0.05341	0.004117	0	0.002030
14	0.693	0.02689	0.005282	0.0008768	0.000840

表 4.新提案(DMU3,6,10 を 1 に固定)

病院	効率値	v1	v2	u1	u2
1	0.891	0.14028	0.027552	0.0045740	0.004384
2	0.943	0.11084	0.021772	0.0036143	0.003464
3	1	0.10392	0.020411	0.0033885	0.003248
4	0.546	0.11744	0.023066	0.0038292	0.003670
5	0.742	0.05935	0.011657	0.0019352	0.001855
6	1	0.07356	0.016095	0.0040202	0.001222
7	0.736	0.08710	0.017108	0.0028401	0.002722
8	0.843	0.08026	0.015765	0.0026171	0.002508
9	0.932	0.06067	0.011916	0.0019781	0.001896
10	1	0.05191	0.011357	0.0028369	0.000863
11	0.828	0.06628	0.013019	0.0021613	0.002071
12	0.870	0.05209	0.010232	0.0016986	0.001628
13	0.610	0.03725	0.007317	0.0012148	0.001164
14	0.693	0.02689	0.005282	0.0008768	0.000840

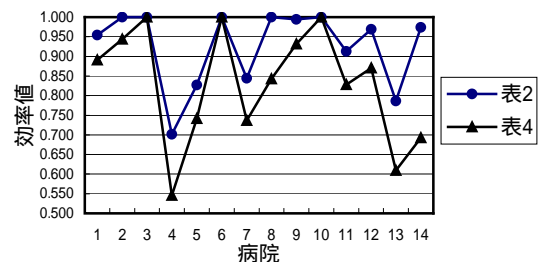


図 2.効率値の推移

表 5. 双対問題の結果

	効率値	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0.891	0	0	-2.089	0	0	1.180	0	0	0	0.628	0	0	0	0
2	0.943	0	0	-4.434	0	0	1.850	0	0	0	1.518	0	0	0	0
3	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0.546	0	0	6.199	0	0	-1.624	0	0	0	-1.888	0	0	0	0
5	0.742	0	0	-0.509	0	0	-0.900	0	0	0	1.589	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0.736	0	0	6.637	0	0	-1.684	0	0	0	-1.868	0	0	0	0
8	0.843	0	0	4.524	0	0	-0.023	0	0	0	-1.802	0	0	0	0
9	0.932	0	0	-2.556	0	0	0.416	0	0	0	1.907	0	0	0	0
10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
11	0.828	0	0	4.266	0	0	-0.142	0	0	0	-1.472	0	0	0	0
12	0.870	0	0	10.472	0	0	-2.509	0	0	0	-2.866	0	0	0	0
13	0.610	0	0	17.035	0	0	-6.411	0	0	0	-3.621	0	0	0	0
14	0.693	0	0	10.020	0	0	-8.033	0	0	0	1.750	0	0	0	0

表 5 より病院 1 を例にして努力目標の解釈を行う。病院 1 に対する優位集合は病院 3, 6, 10 となるので、この病院 1 に対する優位集合の の値より病院 1 の努力目標は以下ようになる。

$$[\text{入力}] 0.891 \times (\text{病院 1}) = -2.089 \times (\text{病院 3}) + 1.180 \times (\text{病院 6}) + 0.628 \times (\text{病院 10})$$

$$[\text{出力}] (\text{病院 1}) = -2.089 \times (\text{病院 3}) + 1.180 \times (\text{病院 6}) + 0.628 \times (\text{病院 10})$$

本研究では双対問題の目的関数を入力最小としているため、病院 1 の出力を変化させずに入力を 0.891 倍することで効率的にすることができると考えられる。病院 1 の入力の構成比率を変えずに病院 1 を効率的にするには、 $\text{医師}: 0.891 \times 3.008 = 2.680$ 、 $\text{看護婦}: 0.891 \times 20.980 = 18.693$ と計算できるので、医師の総勤務時間数を 328 時間、看護婦の総勤務時間数を 2287 時間減らせばよいことになる。

4 節の実験では病院 6 3 10 に新たな評価法を適用したが、病院 6 2 10, 6 10 に適用したところ最終的にゼロウェイトは出現しなくなった。また図 3 にいずれの効率値の推移を示したところ病院 6 3 10 と似た結果が得られた。いずれの場合も効率値は従来の評価法で得られる効率値に比べると維持または低下しているため現実的な評価結果が得られたと考えられる。

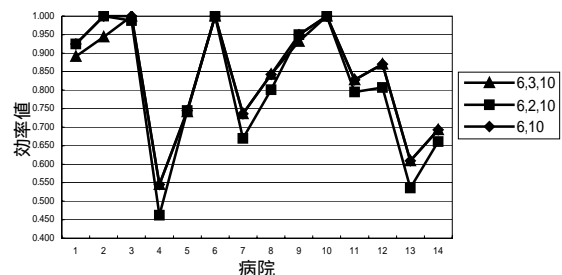


図 3. 効率値の推移

6. まとめ

本研究では、DEA を現実的な問題に適用してゼロウェイトの出現が見られる際に、「現実的なウェイトをもつ DMU に着目し、その DMU の効率値を 1 に固定し、ウェイトを間接的に制限する」という評価法を提案した。この評価法は、既存のものと比べてウェイトを制限する際に生じる上下限の設定の困難さや測定単位による効率値の変化を排除できるという長所がある。また、先行研究における双対問題によって得られる努力目標は解釈が困難であるのに対し、本研究での双対問題における努力目標の解釈は容易であるという特長もある。

新しい評価法を病院のデータに適用して検証したところ、2~3 個の模範的 DMU の効率値を 1 に固定することによってゼロウェイトは消滅した。従来の評価法で得られる効率値に比べて各 DMU の効率値は維持または低下しており、より現実的な評価結果が得られたと考えられる。さらに多くの事例に対して適用して、その挙動を確認することは今後の課題である。

参考文献

- [1] C.S.Sarrico, R.G.Dyson : Restricting virtual weights in data envelopment analysis , European Journal of Operational Research 159(2004) 17-3
- [2] 刀根 薫 : 「経営効率性の測定と改善」, 日科技連出版社, 1993

