線形計画法による日経２２５オプションポートフォリオの構築

田中　淳一（沼田　一道　助教授）

1. はじめに

投資は経済を先導する重要な活動の一つであるが本質的にリスクを伴う．そのため，利益を確保しつつリスクを抑える複数対象（原資産）への分散投資（ポートフォリオ）や原資産の価値の変動を補償する保険（オプション）の仕組みが古くから考えられてきた．マーコビッツのポートフォリオ選択理論とブラック=ショールズのオプション価格理論は，これらを理論的に確立したものであり現代金融工学の２本の柱である．

Papahristodoulou[1]と Rendleman[2]はオプション売買にポートフォリオを導入したローリスク・ハイリターンの投資方法を提案している．しかし[1，2]は個別株を原資産とするオプションを対象とし，線形計画法を用いて最適ポートフォリオを求めてはいるが，その収益を実際に検証した結果は示していない．本研究では，個別株の代わりに日経２２５株価指数を原資産とし，既に価格推移が確定している過去のデータ（オプション）を用いて最適ポートフォリオを構築する．これを反対売買（買ったオプションを売り戻し，売ったオプションを買い戻して決済すること）することで得られたであろう利益の時系列推移を観察して，先行研究の提案の有効性を検証する．

2. 先行研究の理論

ある原資産のオプションは，異なる満期日・行使価格で，何種類もの銘柄が取引されている．各銘柄は市場で取引されており，需要が高い銘柄には高値が，需要が低い銘柄には安値がついている．このように市場で決定するオプションの「市場価格」とは別に，ブラック=ショールズのオプション価格式より導かれる「理論価格」が存在する．先行研究ではこの２種類の価格の差に注目し，割高なオプションは買い持ち，割安なオプションは売り持ちすることで含み益が高いポートフォリオができるとした．オプションは満期日に理論価格で清算されるシステムなので，満期日に近づくに従って市場価格は理論価格に近づき，２つの価格が接近した時点で反対売買を行えば含み益が得られることになる．しかし，オプションの理論価格は，原資産の価格とボラティリティ，市場の金利，満期までの残り日数の変動に伴って変動するため，割高なオプションが割安に，割安なオプションが割高になることがある．従って，含み益を実現するにはオプションの理論価格変動リスクをヘッジする必要がある．そこで，複数のオプションを組合せることによって，オプションの理論価格の変動を相殺させる．そのためには，以下の条件を満たすオプションポートフォリオを構築すればよい．

オプション $i(1,\dots,n)$ について，ポートフォリオに含まれる各オプションの，数量を w_i，原資産の価格を p_i，理論価格を $P_{t,i}$，満期までの残り日数を T_i，ボラティリティを σ_i とする．また，市場における無リスク利子率（リスクがない金融商品につく利子率）を r とする．

① p_i の変動に対する $P_{t,i}$ の変化率を δ_i とする．各オプションの δ 値に数量を掛けたものを合計し，ポートフォリオ全体で 0 にする（各オプションの原資産価格が変動しても，ポートフォリオの理論価格は変動しないと期待される）．

$$w_1\delta_1 + \cdots + w_n\delta_n = w_1\frac{\partial P_{t,1}}{\partial p_1} + \cdots + w_n\frac{\partial P_{t,n}}{\partial p_n} = 0 \tag{1}$$

②p_iの変動に対するδ_iの変化率をγ_iとする．各オプションのγ値に数量を掛けたものを合計し，ポートフォリオ全体で0にする（各オプションの原資産価格が変動しても，ポートフォリオのδは変動しないと期待される．すなわち，(1)式だけではヘッジできない原資産価格の大きな変動をヘッジできると考えられる）．

$$w_1\gamma_1 + \cdots + w_n\gamma_n = w_1\frac{\partial \gamma_1}{\partial p_1} + \cdots + w_n\frac{\partial \gamma_n}{\partial p_n} = 0 \tag{2}$$

③T_iの変動に対する$P_{t,i}$の変化率をθ_iとする．各オプションのθ値に数量を掛けたものを合計し，ポートフォリオ全体で0にする（各オプションの満期日までの日数が変動しても，ポートフォリオの理論価格は変動しないと期待される）．

$$w_1\theta_1 + \cdots + w_n\theta_n = w_1\frac{\partial P_{t,1}}{\partial T_1} + \cdots + w_n\frac{\partial P_{t,n}}{\partial T_n} = 0 \tag{3}$$

④rの変動に対する$P_{t,i}$の変化率をρ_iとする．各オプションのρ値に数量を掛けたものを合計し，ポートフォリオ全体で0にする（無リスク金利が変動しても，ポートフォリオの理論価格は変動しないと期待される）．

$$w_1\rho_1 + \cdots + w_n\rho_n = w_1\frac{\partial P_{t,1}}{\partial r} + \cdots + w_n\frac{\partial P_{t,n}}{\partial r} = 0 \tag{4}$$

⑤σ_iの変動に対する$P_{t,i}$の変化率をκ_iとする．各オプションのκ値に数量を掛けたものを合計し，ポートフォリオ全体で0にする（各オプションのボラティリティが変動しても，ポートフォリオの理論価格は変動しないと期待される）．

$$w_1\kappa_1 + \cdots + w_n\kappa_n = w_1\frac{\partial P_{t,1}}{\partial \sigma_1} + \cdots + w_n\frac{\partial P_{t,n}}{\partial \sigma_n} = 0 \tag{5}$$

以上５つの条件を満たしたポートフォリオを構築すれば，ポートフォリオの理論価格を満期日まで一定に保ち続けられると期待される．なお(1)〜(5)式におけるδ・γ・θ・ρ・κは Greek と呼ばれる．このようなポートフォリオの中で含み益（反対売買益）を最大とするオプションの銘柄と数量（最適ポートフォリオ）はつぎの線形計画問題の最適解として求められる．

使用する記号の定義

・コールオプション　$i(i=1,\ldots,m)$ について
　市場価格を $P_{m,i}$　理論価格を $P_{t,j}$
　δをδ_i　γをγ_i　θをθ_i　ρをρ_i　κをκ_i
　買い持ち数を a_i　売り持ち数を b_i

・プットオプション　$j(j=1,..,n)$ について
　市場価格を$P_{m,j}$　理論価格を$P_{t,j}$
　δをδ_j　γをγ_j　θをθ_j　ρをρ_j　κをκ_j
　買い持ち数をc_j　売り持ち数をd_j

・所持可能オプショ数の上限をl

最適ポートフォリオを構築するための線形計画問題

$$\left\{\begin{array}{ll}
\max & \sum_{i=1}^{m}(P_{t,i}-P_{m,i})\times a_i - \sum_{i=1}^{m}(P_{t,i}-P_{m,i})\times b_i + \sum_{j=1}^{n}(P_{t,j}-P_{m,j})\times c_j - \sum_{j=1}^{n}(P_{t,j}-P_{m,j})\times d_j \\
\textit{sub to} & \sum_{i=1}^{m}\delta_i a_i - \sum_{i=1}^{m}\delta_i b_i + \sum_{j=1}^{n}\delta_j c_j - \sum_{j=1}^{n}\delta_j d_j = 0 \\
& \sum_{i=1}^{m}\gamma_i a_i - \sum_{i=1}^{m}\gamma_i b_i + \sum_{j=1}^{n}\gamma_j c_j - \sum_{j=1}^{n}\gamma_j d_j = 0 \\
& \sum_{i=1}^{m}\theta_i a_i - \sum_{i=1}^{m}\theta_i b_i + \sum_{j=1}^{n}\theta_j c_j - \sum_{j=1}^{n}\theta_j d_j = 0 \\
& \sum_{i=1}^{m}\rho_i a_i - \sum_{i=1}^{m}\rho_i b_i + \sum_{j=1}^{n}\rho_j c_j - \sum_{j=1}^{n}\rho_j d_j = 0 \\
& \sum_{i=1}^{m}\kappa_i a_i - \sum_{i=1}^{m}\kappa_i b_i + \sum_{j=1}^{n}\kappa_j c_j - \sum_{j=1}^{n}\kappa_j d_j = 0 \\
& \sum_{i=1}^{m}\delta_i a_i - \sum_{j=1}^{n}\delta_j d_j \le l \\
& a_i, b_i, c_j, d_j, l \ge 0
\end{array}\right.$$

3. 実験

本研究では次のようにして日経２２５オプションの理論価格を算出する．

プット・オプションの理論価格　$P = -Se^{-qt}N(-d_1) + Ee^{-rt}N(-d_2)$　(6)

コール・オプションの理論価格　$C = Se^{-qt}N(d_1) - Ee^{-rt}N(d_2)$　(7)

ただし　$d_1 = \{ \ln(S/E) + (r - q + \sigma^2/2)\, t \} / \sigma\sqrt{t}$　　$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$

各記号の意味は以下の通りである．

E:当該オプションの権利 行使価格　$N(x)$:標準正規分布の累積確率密度関数

e:自然対数の底　t:計算日の翌日から満期日までの日数÷365　$\ln$:自然対数

S:計算日の日経平均の終値　r:計算日前日に全国銀行協会が公表した*TIBOR*3ヶ月物

σ:日経平均の予想変動率 (ボラティリティ)　q:計算日前日の日経平均 予想配当利回り

3.1　実験手順

Ⅰ．ポートフォリオ構築日から直近の満期日前日までの毎営業日に取引があった（市場価格がついていた）銘柄だけを選び出す（大阪証券取引所 web site[5]より）

Ⅱ．Ⅰで選択した各銘柄の理論価格・Greek を算出するための各種データを収集する（r を全国銀行協会 web site[4]から，σ を[5]から，q および E を日本経済新聞[6]から収集）

Ⅲ．集めたデータから各銘柄の理論価格・Greek を求め，市場価格とともに，表計算ソフト上で作成した線形計画問題シートに入力し，ソルバーで解き，最適ポートフォリオを求める

Ⅳ．最適ポートフォリオを満期日前日までの毎営業日にはじめて反対売買で決済したと仮定する．満期日に近づくにしたがって，反対売買益が理論反対売買益に近づくのかを確認する

4. 結果

結果①：04 年 9 月 10 日での最適ポートフォリオは
・10 月限 行使価格 12000 円の long call 22 単位
・12 月限 行使価格 11000 円の long call 182 単位
・10 月限 行使価格 11500 円の short call 17 単位
・12 月限 行使価格 11500 円の short call 277 単位
・12 月限 行使価格 8500 円の long put 8 単位
・10 月限 行使価格 10000 円の short put 16 単位
であった．10 月の満期日前日までの毎営業日で決済した場合に得られる利益を図１に示した．
～月限（がつぎり）とは満期の到来する月を表す．

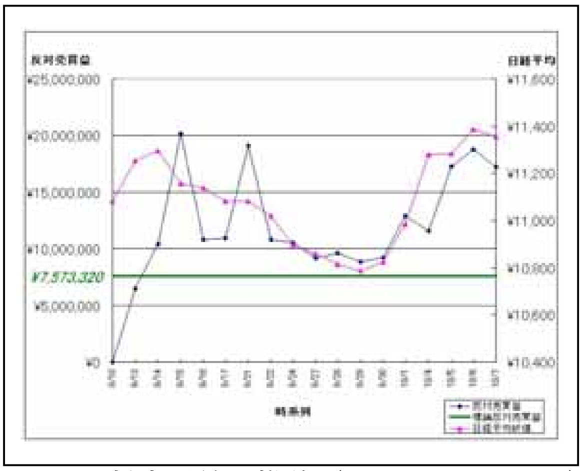

図１：反対売買益の推移（04/9/10～04/10/7）

結果②：04 年 10 月 8 日での最適ポートフォリオは
・1 月限 行使価格 12000 円の long call 324 単位
・12 月限 行使価格 12000 円の short call 91 単位
・1 月限 行使価格 12500 円の short call 536 単位
・12 月限 行使価格 9500 円の long put 415 単位
・11 月限 行使価格 10500 円の short put 154 単位
・12 月限 行使価格 9000 円の short put 114 単位
であった．11 月の満期日前日までの毎営業日で決済した場合に得られる利益を図２に示した．

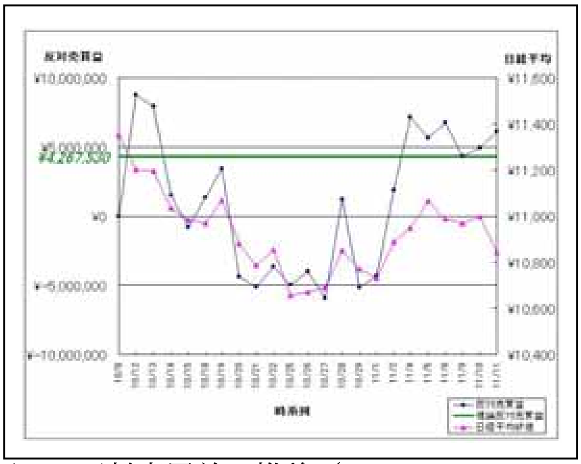

図２：反対売買益の推移（04/10/8～04/11/11）

結果③：04 年 11 月 12 日での最適ポートフォリオは
・2 月限 行使価格 13000 円の long call 73 単位
・3 月限 行使価格 11000 円の long call 194 単位
・12 月限 行使価格 11500 円の short call 23 単位
・3 月限 行使価格 12000 円の short call 574 単位
・3 月限 行使価格 8500 円の long put 24 単位
・1 月限 行使価格 9000 円の short put 10 単位
であった．12 月の満期日前日までの毎営業日で決済した場合に得られる利益を図３に示した．

図３：反対売買益の推移（04/11/12～04/12/9）

5. 考察

図２と図３から，原資産価格が変動しても反対売買益は満期日直前に理論値に近づいていることが分かる．この点では先行研究の理論は日経２２５オプションポートフォリオにも効果があるといえる．しかし図１では満期日直前になっても最適ポートフォリオの反対売買益は理論値に近づいていない．この点では先行研究の理論を改良する余地が残っているといえる．また，各最適ポートフォリオの反対売買益は満期日前日より前に理論値を上回ることがある．満期日前日までポートフォリオを維持しなくても，反対売買益が理論値を上回った時点で決済すれば理論反対売買益を上回る利益を得ることができると考えられる．

6. まとめ

本研究では Papahristodoulou[1]と Rendleman[2]が提案する理論を日経２２５オプションに適用し，その有効性を検証した．実験の結果，最適ポートフォリオ構築日から直近の満期日までの間に理論値を上回る反対売買益を得られる日が存在し，その日に反対売買で決済をすれば利益を上げられることが示された．したがって先行研究の理論には，ある程度の有効性があったといえる．現実の取引で活用するには，満期日までの毎営業日に確実に反対売買できるように，ポートフォリオ構築時点で流動性が高い銘柄を選び出す方法を考えなければならない．また，本研究では考慮しなかった売買手数料や税金などを考える必要がある．

参考文献

[1]Christos Papahristodoulou: ”Option strategies with linear programming”, European Journal of Operational Research 157, pp. 246-256, 2004.

[2]Richard J.Rendleman,Jr.: ”AN LP APPROACH TO OPTION PORTFOLIO SELECTION”, Advances in Futures and Options Research, vol.8, JAI Press, pp. 31-52, 1995.

[3]ジョン・C・ハル著，小林孝雄監訳:「先物・オプション取引入門」，ピアソン・エデュケーション，第一版第一刷，2001

[4] web site：全国銀行協会，全銀協TIBORレート http://www.zenginkyo.or.jp/tibor/index.html

[5] web site：大阪証券取引所，取引データ http://www.ose.or.jp/data/index.html

[6]日本経済新聞：2004 年 9 月 10 日・10 月 8 日・11 月 12 日付 マーケット総合２面 主要指標欄