線形計画法による　日経225オプションポートフォリオの構築

東京理科大学工学部経営工学科
沼田研究室
4401054　田中淳一

発表の流れ

1. はじめに
2. 先行研究の提案
3. 数値実験
4. 結果および考察
5. 結論
6. 今後の課題
7. 参考文献

1. はじめに

投資は経済活動を先導する重要な手段だが リスク を伴う

回避

オプション

ポートフォリオ

1.1 オプションとは

原資産 を
（株・指数など）

定められた期日or期間
に
定められた価格
で
買い付ける権利
もしくは
売りつける権利

満期日
行使価格
コール・オプション
プット・オプション

オプション利用の一例

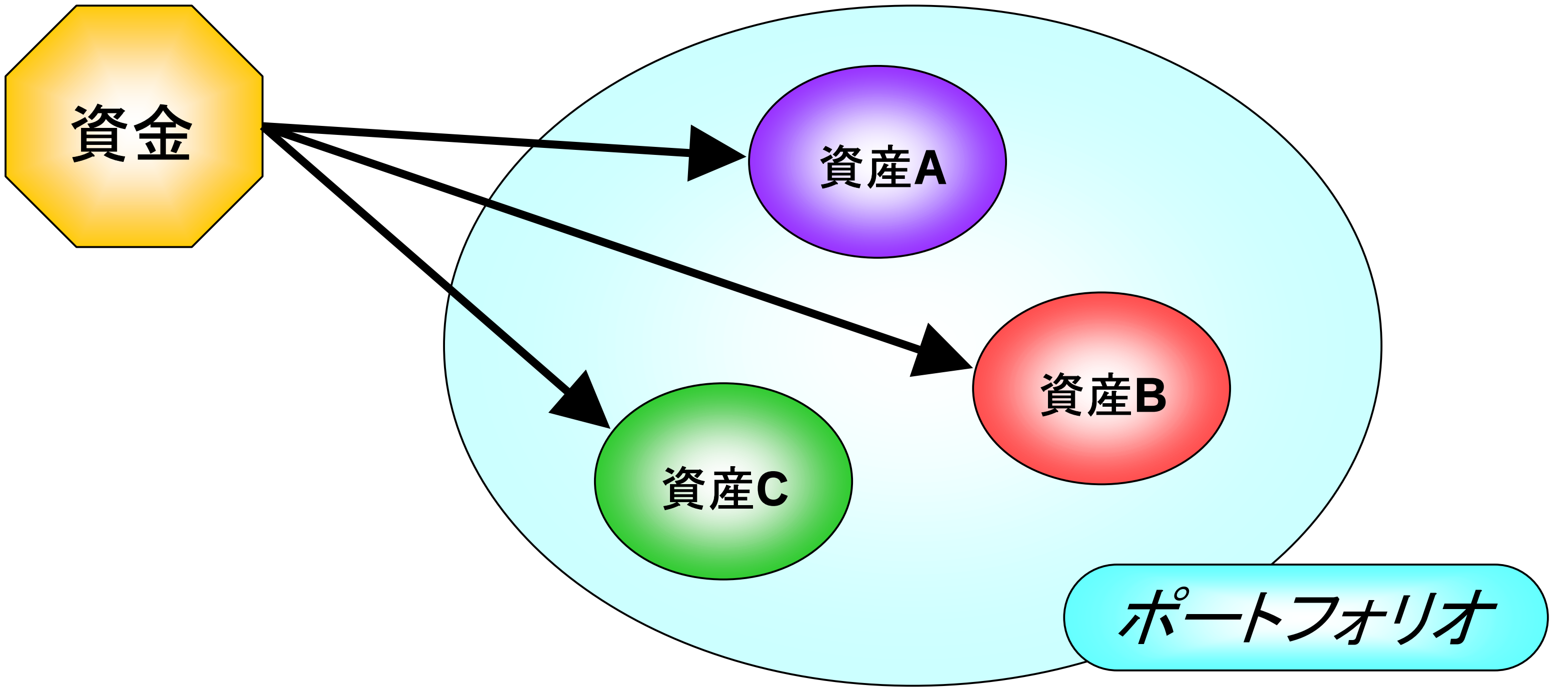
満期日が**4月1日**で行使価格**12000円**の**コール・オプション**

買い手・・・4月1日に原資産を12000円で購入する権利をもつ

売り手・・・4月1日に原資産を12000円で売却する義務が生じる

1.2　ポートフォリオとは

利益を確保しつつリスクを抑えるように
複数の資産へ分散投資してできた資産全体



1.3 オプションポートフォリオに関する最近の研究

Papahristodoulou[1]

Rendleman[2]

原資産を株式とした*株式オプション*を用い，線形計画法を利用することにより
ローリスク・ハイリターンなオプションポートフォリオ(*最適ポートフォリオ*)を構築

・株式以外を原資産とした場合の検証がない

・最適ポートフォリオを反対売買することで得られる利益についての言及がない

反対売買: 買ったオプションを売る or 売ったオプションを買い戻す

1.4 研究目的

・株式以外を原資産とした場合の検証がない

原資産を株式から日経225株価指数に代える

・最適ポートフォリオを反対売買することで得られる利益についての言及がない

最適ポートフォリオの反対売買を行い，利益の上がり方を調べる

日経225オプションで最適ポートフォリオを構築したのち
このポートフォリオを反対売買して利益の上がり方を調べ
日経225オプションポートフォリオでも
先行研究の提案が有効かどうか検証する

2.1 2つのオプション価格に注目する

市場の需供関係で決定

市場価格

価格公式により決定

理論価格

市場価格が理論価格よりも割安なオプションは買っておく

市場価格が理論価格よりも割高なオプションは売っておく

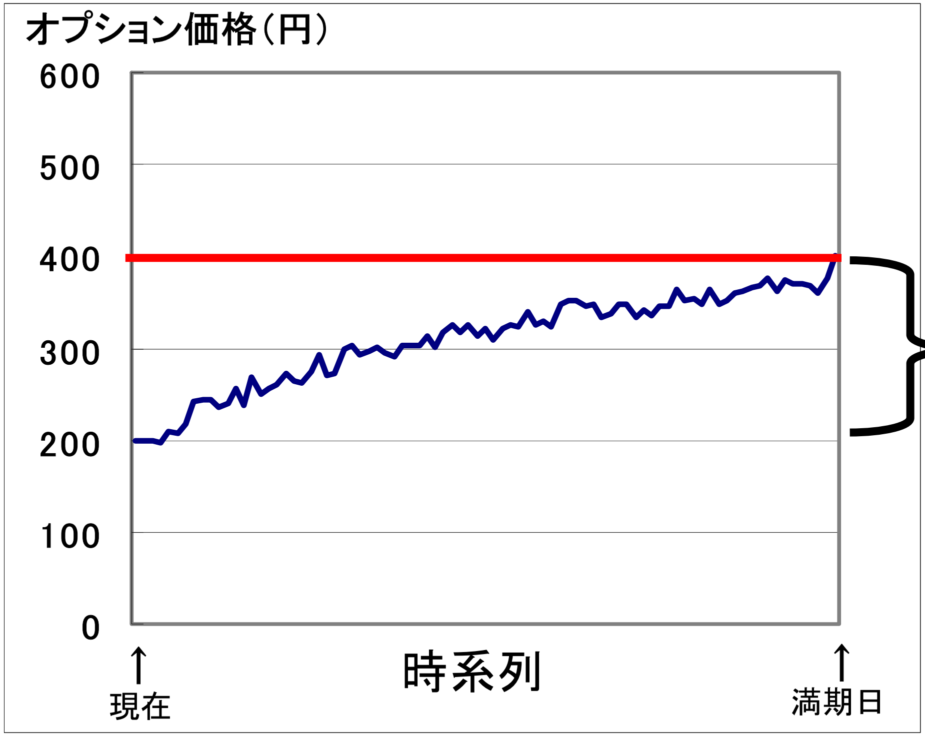
市場価格が理論価格に近づいた時点で反対売買して利益を上げる

2.2 反対売買で利益を出す方法

オプションの市場価格は、満期日において理論価格になる

理論価格 → 400円

市場価格 → 200円



割安なので購入

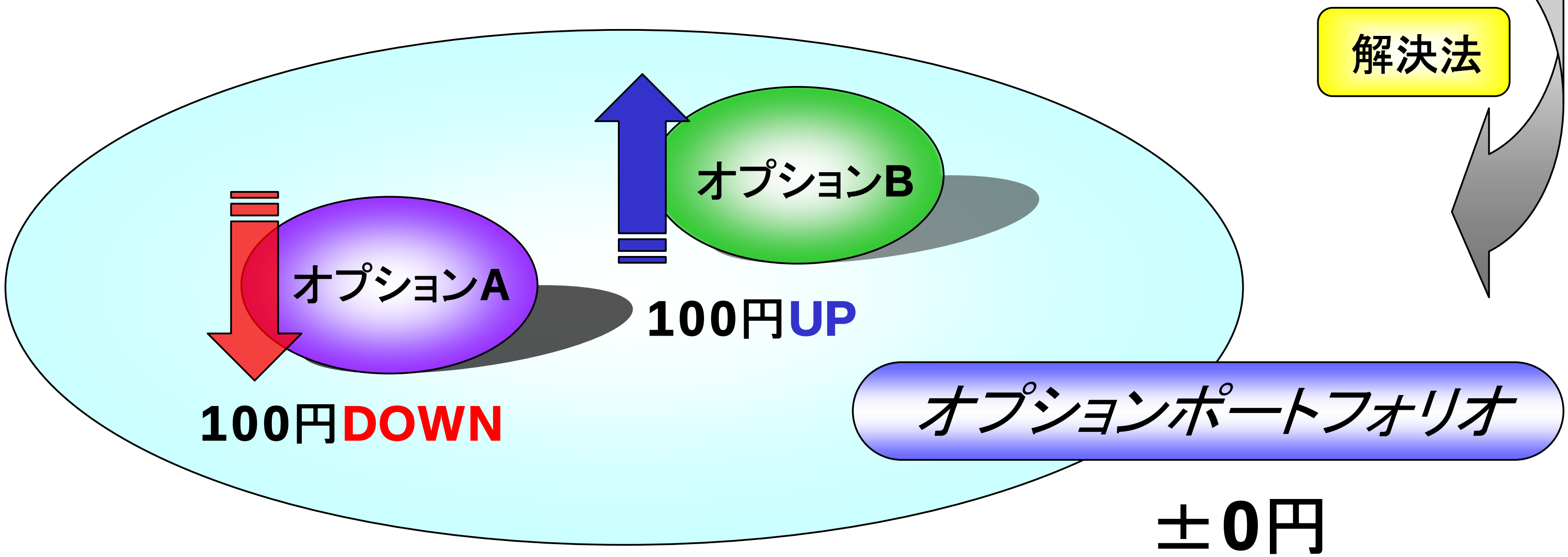
満期日待つ

200円の反対売買益

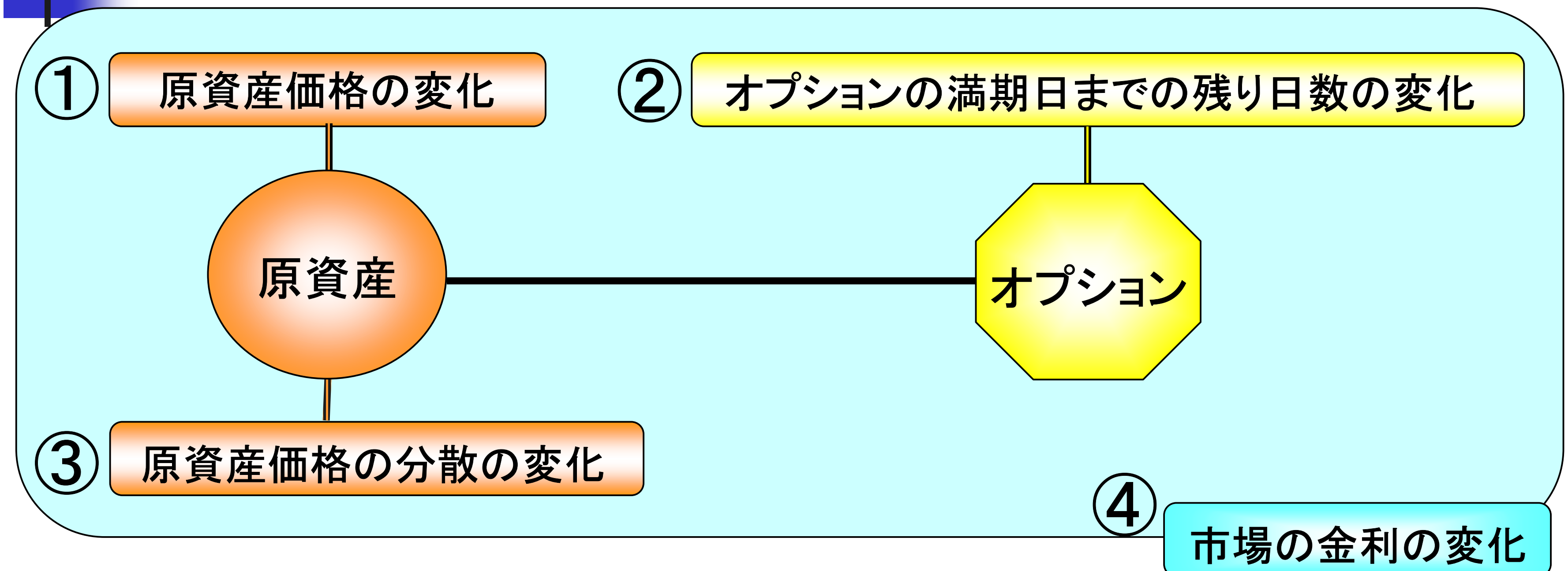
2.3 ポートフォリオを利用して理論価格を一定に保つ

オプションの理論価格は毎営業日に変動する

割安なオプションが割高に，割高なオプションが割安になってしまうことがある



2.4 オプションの理論価格を変動させる要因



①に対する理論価格の変化率→ $\delta \cdot \gamma$
②に対する理論価格の変化率→ θ
③に対する理論価格の変化率→ κ
④に対する理論価格の変化率→ ρ

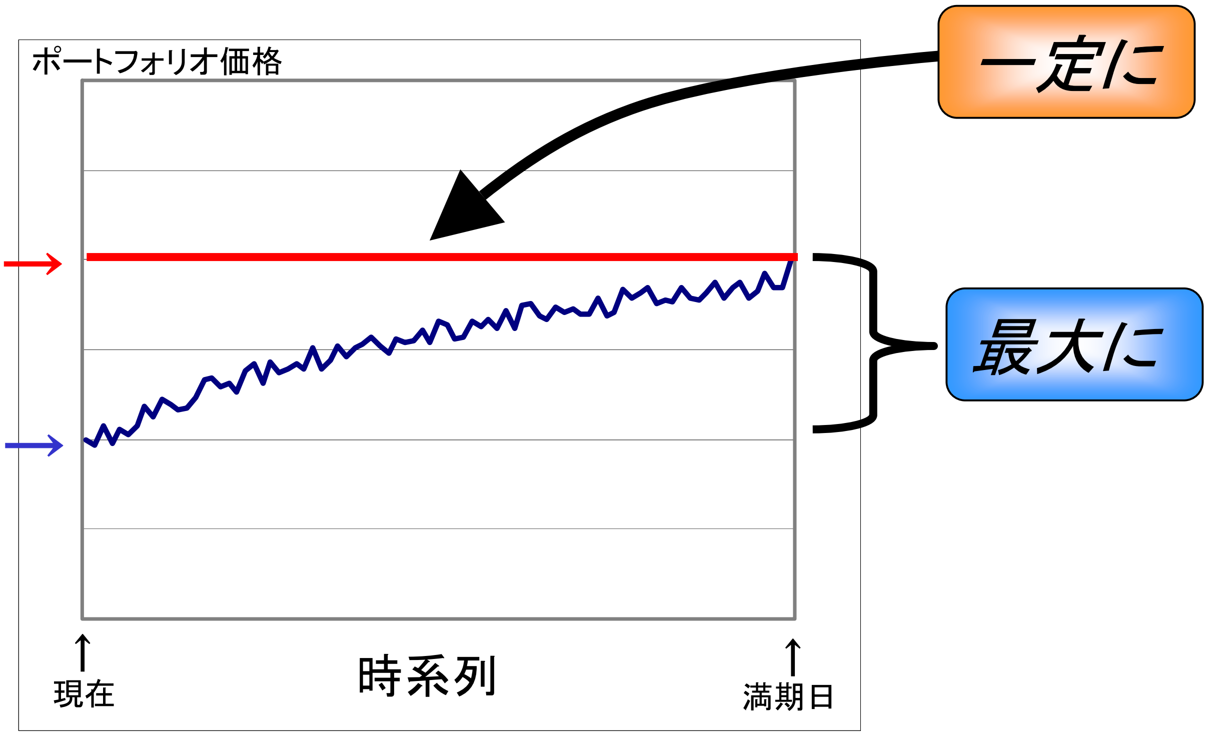
Greek

2.5 最適ポートフォリオを構築するには

2.1～2.4に示したことをまとめると･･･

ポートフォリオの
理論価格 →

ポートフォリオの
市場価格 →



2.6 最適ポートフォリオ構築モデル

使用する記号の定義

・コール・オプション $i(i=1,\ldots,m)$ について

市場価格: $P_{m,i}$ 理論価格 : $P_{t,i}$

$\delta:\delta_i$ $\gamma:\gamma_i$ $\theta:\theta_i$ $\rho:\rho_i$ $\kappa:\kappa_i$

買持ち数 : a_i 売持ち数 : b_i

・プット・オプション $j(j=1,\ldots,n)$ について

市場価格: $P_{m,j}$ 理論価格 : $P_{t,j}$

$\delta:\delta_j$ $\gamma:\gamma_j$ $\theta:\theta_j$ $\rho:\rho_j$ $\kappa:\kappa_j$

買持ち数: c_j 売持ち数 : d_j

・ポートフォリオの δ の上限 : l

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\max & \sum_{i=1}^{m}\left(P_{t,i}-P_{m,i}\right)\times a_i-\sum_{i=1}^{m}\left(P_{t,i}-P_{m,i}\right)\times b_i+\sum_{j=1}^{n}\left(P_{t,j}-P_{m,j}\right)\times c_j-\sum_{j=1}^{n}\left(P_{t,j}-P_{m,j}\right)\times d_j \\
\text{s.t.} & \sum_{i=1}^{m}\delta_i a_i-\sum_{i=1}^{m}\delta_i b_i+\sum_{j=1}^{n}\delta_j c_j-\sum_{j=1}^{n}\delta_j d_j=0 \\
& \sum_{i=1}^{m}\gamma_i a_i-\sum_{i=1}^{m}\gamma_i b_i+\sum_{j=1}^{n}\gamma_j c_j-\sum_{j=1}^{n}\gamma_j d_j=0 \\
& \sum_{i=1}^{m}\theta_i a_i-\sum_{i=1}^{m}\theta_i b_i+\sum_{j=1}^{n}\theta_j c_j-\sum_{j=1}^{n}\theta_j d_j=0 \\
& \sum_{i=1}^{m}\rho_i a_i-\sum_{i=1}^{m}\rho_i b_i+\sum_{j=1}^{n}\rho_j c_j-\sum_{j=1}^{n}\rho_j d_j=0 \\
& \sum_{i=1}^{m}\kappa_i a_i-\sum_{i=1}^{m}\kappa_i b_i+\sum_{j=1}^{n}\kappa_j c_j-\sum_{j=1}^{n}\kappa_j d_j=0 \\
& \sum_{i=1}^{m}\delta_i a_i-\sum_{j=1}^{n}\delta_j d_j\le l \\
& a_i,b_i,c_j,d_j,l\ge 0
\end{array}
\right.
$$

3. 数値実験

過去の日経225オプションの取引データを用いて実験する

留意点

先行研究

株式オプション

本研究

指数オプション

理論価格の算出式の一部が異なる

Greekの算出式の一部が異なる

3.1 実験手順

I 検証期間を決め，全営業日に取引のあった銘柄だけを選び出す

▼

II 各銘柄の理論価格・Greekを表計算ソフトで算出する

▼

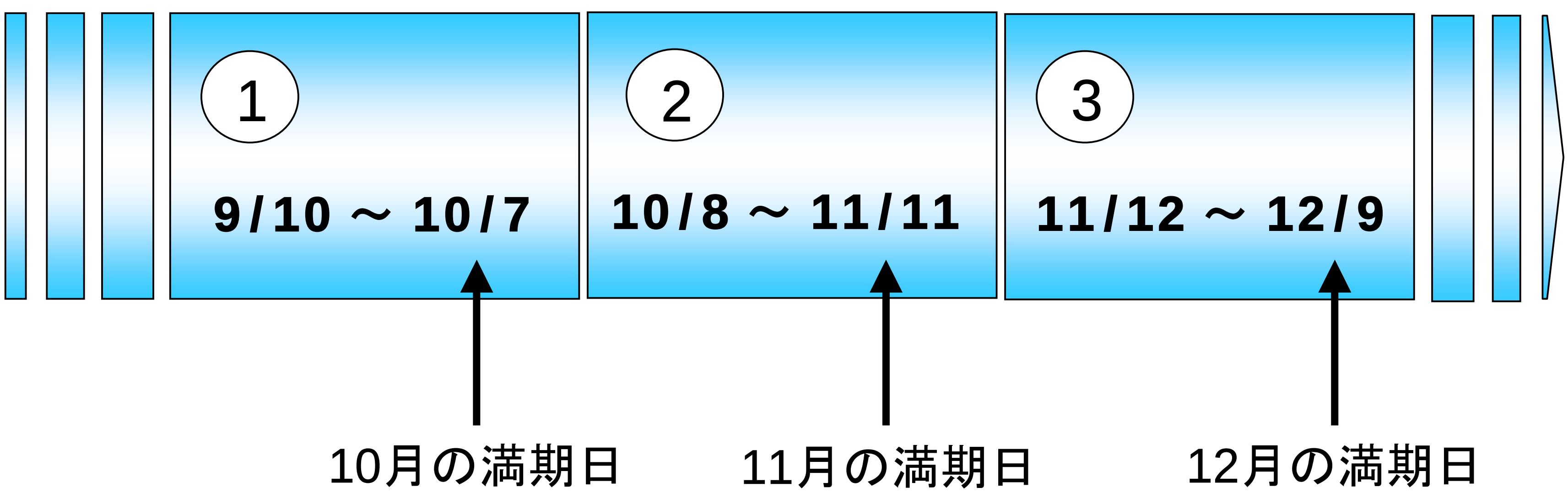
III 理論価格・Greekと各銘柄の市場価格を，線形計画問題シートに入力し，ソルバーで解き，最適ポートフォリオを求める

▼

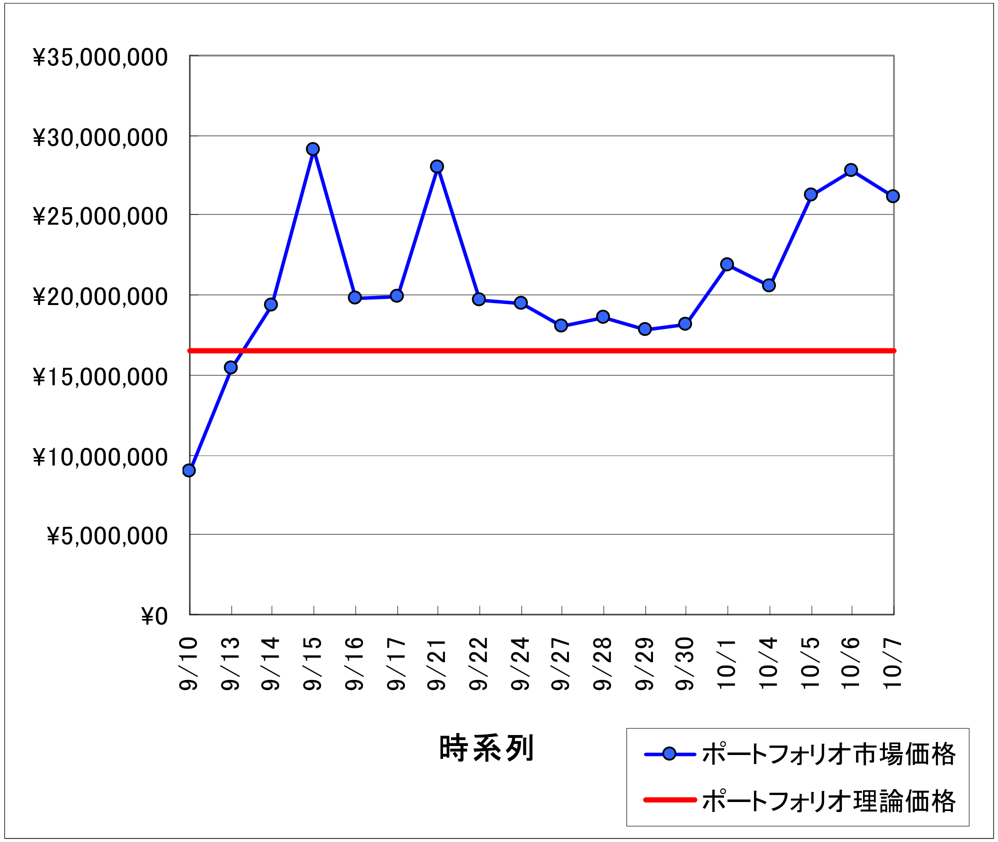
IV 検証期間中の毎営業日に反対売買で決済して、その利益がどのように変化するのか観察する

3.2　検証期間

2005年



4.1 ① 9月10日～10月7日における 反対売買結果および考察



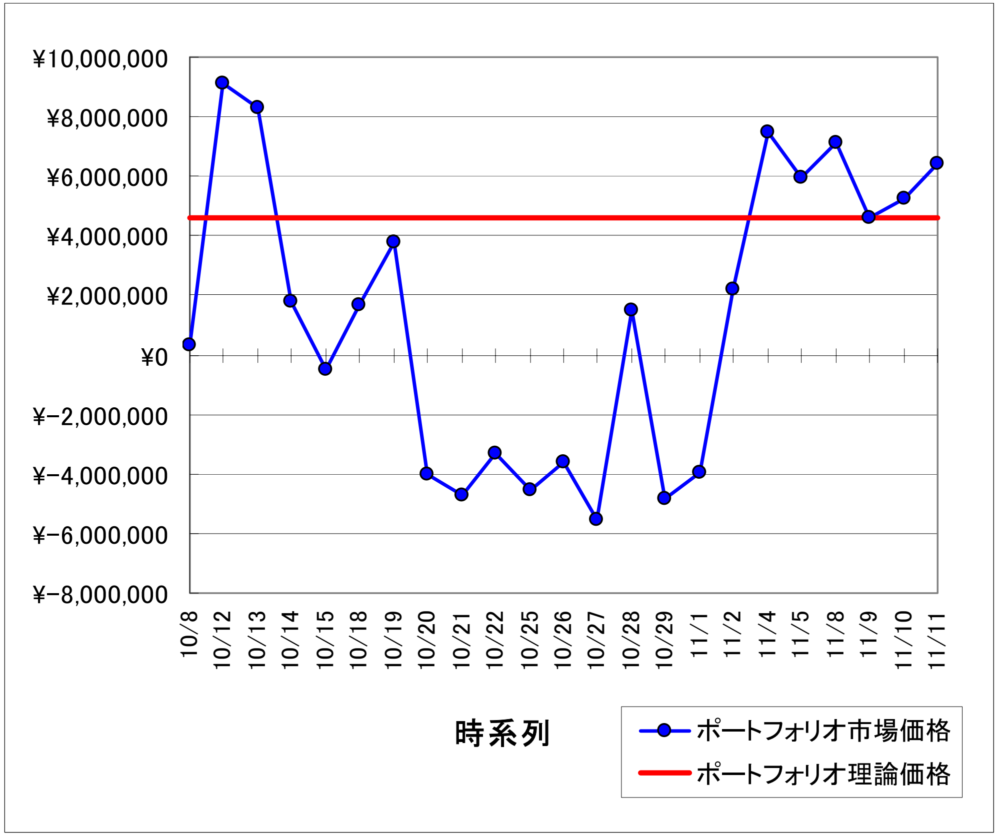
9月10日構築の最適ポートフォリオ

満期	行使価格		数量	売/買
10月	12000円	コール・	22単位	買い
12月	11000円	コール・	182単位	買い
10月	11500円	コール・	17単位	売り
12月	11500円	コール・	277単位	売り
10月	8500円	プット・	8単位	買い
10月	10000円	プット・	16単位	売り

市場価格・・・ ￥ 8,941,000

理論価格・・・ ￥ 16,514,320

4.2 ② 10月8日～11月11日における反対売買結果および考察



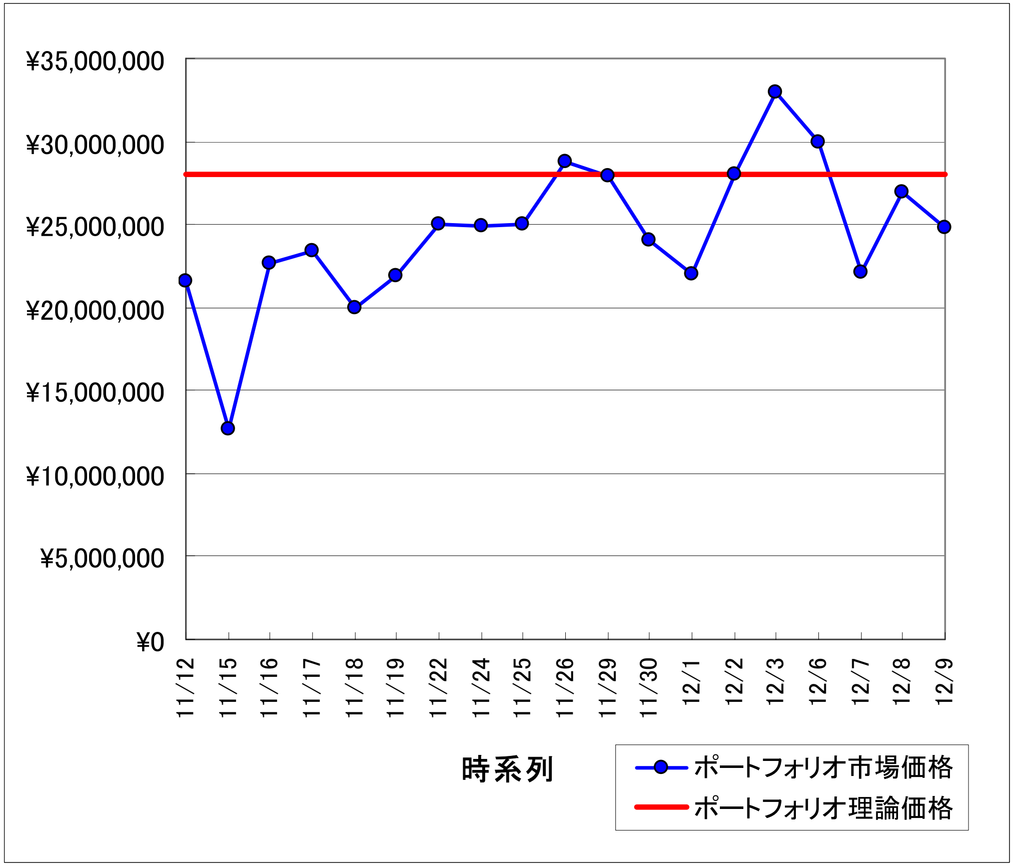
10月8日構築の最適ポートフォリオ

満期	行使価格		数量	売/買
1月	12000円	コール・	324単位	買い
12月	12000円	コール・	91単位	売り
1月	12500円	コール・	536単位	売り
12月	9500円	プット・	415単位	買い
11月	10500円	プット・	154単位	売り
12月	9000円	プット・	114単位	売り

市場価格 ・・・ ￥ 338,000

理論価格 ・・・ ￥4,605,530

4.3 ③ 11月12日～12月9日における反対売買結果および考察



11月12日構築の最適ポートフォリオ

満期	行使価格		数量	売/買
2月	13000円	コール	・73単位	買い
3月	11000円	コール	・194単位	買い
12月	11500円	コール	・23単位	売り
3月	12000円	コール	・574単位	売り
3月	8500円	プット	・24単位	買い
1月	9000円	プット	・10単位	売り

市場価格 ・・・ ￥21,562,000

理論価格 ・・・ ￥27,987,085

5. 結論

・最適ポートフォリオの市場価格は、満期日に近づくにしたがって理論価格に接近する傾向が見られた

・期待した以上の反対売買益が得られる日が存在する

先行研究の理論は、日経225オプションポートフォリオにも適用可能と考えられる

6. 今後の課題

・毎営業日で確実にポートフォリオを反対売買できるように、流動性が高い銘柄を選び出す方法を確立する

・売買手数料も考慮に入れる

7. 参考文献

[1] Christos Papahristodoulou: ”Option strategies with linear programming”, European Journal of Operational Research 157, pp.246-256, 2004.

[2] Richard J.Rendleman,Jr.: “AN LP APPROACH TO OPTION PORTFOLIO SELE-CTION”, Advances in Futures and Option Research, vol.8, JAI Press, pp.31-52, 1995.

[3] ジョン・C・ハル著, 小林孝雄監訳:「先物・オプション取引入門」, ピアンソン・エデュケーション, 第1版代1刷, 2001.

[4] web site：全国銀行協会, 全銀協TIBORレート http://wwwzenginkyo.or.jp/tibor/index.html

[5] web site：大阪証券取引所，取引データ http://www.ose.or.jp/data/index.html

[6] 日本経済新聞：2004年9月10日・10月8日・11月12日付 マーケット総合2面　主要指標欄

付録①

株式オプションの理論価格算出式

先行研究で扱っていた株式オプションの理論価格は以下の式を用いて計算する

プットオプションの理論価格 ： $P = -SN(-d_1) + Ee^{-rt}N(-d_2)$

コールオプションの理論価格 ： $C = SN(d_1) - Ee^{-rt}N(d_2)$

ただし $d_1 = \{\ln(S/E) + (r + \sigma^2/2)t\}/\sigma\sqrt{t}$ $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$

S : 原資産の価格 $N(x)$: 標準正規分布の累積確率密度関数

E : オプションの権利行使価格 e : 自然対数の底

r : 無リスク金利 t : 満期日までの日数÷365

$\ln$: 自然対数 σ : ボラティリティ

付録②

指数オプションの理論価格算出式

本研究で扱った日経平均225オプションの理論価格は以下の様に計算する

プットオプションの理論価格 ： $P = -Se^{-qt}N(-d_1) + Ee^{-rt}N(-d_2)$

コールオプションの理論価格 ： $C = Se^{-qt}N(d_1) - Ee^{-rt}N(d_2)$

ただし $d_1 = \left\{\ln(S/E) + \left(r - q + \sigma^2/2\right)t\right\}/\sigma\sqrt{t}$ $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$

S：計算日の日経平均終値

$N(x)$：標準正規分布の累積確率密度関数

E：当該オプションの権利行使価格

e：自然対数の底

r：計算日前日に全国銀行協会が公表したTIBOR3ヶ月物

t：計算日の翌日から満期日までの日数÷365

$\ln$：自然対数

σ：日経平均の予想変動率（ボラティリティ）

q：計算日の日経平均予想配当利回り

付録③

株式オプションのGreek算出式

先行研究で扱っていた株式オプションのGreekは以下の式を用いて計算する

	コール・オプション	プット・オプション
δ	$\frac{\partial C}{\partial S}=N(d_1)$	$\frac{\partial P}{\partial S}=N(d_1)-1$
γ	$\frac{\partial \delta}{\partial S}=\frac{N(d_1)}{S\sigma\sqrt{t}}$	
θ	$\frac{\partial C}{\partial t}=-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{t}}-rEe^{-rt}N(d_2)$	$\frac{\partial P}{\partial t}=-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{t}}+rEe^{-rt}N(-d_2)$
ρ	$\frac{\partial C}{\partial r}=Ete^{-rt}N(d_2)$	$\frac{\partial P}{\partial r}=-Ete^{-rt}N(-d_2)$
κ	$\frac{\partial C}{\partial \sigma}=\frac{\partial P}{\partial \sigma}=S\sqrt{t}N'(d_1)$	

$N'(x)$ は標準正規分布の確率密度関数　　また，各記号は 付録① で定義したものとする

付録④

指数オプションのGreek算出式

本研究で扱った日経225オプションのGreekは以下の式を用いて計算する

	コール・オプション	プット・オプション
δ	$\frac{\partial C}{\partial S}=e^{-qt}N(d_1)$	$\frac{\partial P}{\partial S}=e^{-qt}\left[N(d_1)-1\right]$
γ	$\frac{\partial \delta}{\partial S}=\frac{N(d_1)e^{-qt}}{S\sigma\sqrt{t}}$	
θ	$\frac{\partial C}{\partial t}=-\frac{SN'(d_1)\sigma e^{-qt}}{2\sqrt{t}}+qSN(d_1)e^{-qt}-rEe^{-rt}N(d_2)$	$\frac{\partial P}{\partial t}=-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{t}}-qSN(d_1)e^{-qt}+rEe^{-rt}N(-d_2)$
ρ	$\frac{\partial C}{\partial r}=Ete^{-rt}N(d_2)$	$\frac{\partial P}{\partial r}=-Ete^{-rt}N(-d_2)$
κ	$\frac{\partial C}{\partial \sigma}=\frac{\partial P}{\partial \sigma}=S\sqrt{t}N'(d_1)e^{-qt}$	

$N'(x)$ は標準正規分布の確率密度関数　　また，各記号は 付録② で定義したものとする