入力価格が不確かな場合のコスト効率下限値の求め方について

山田　智大　(沼田　一道　助教授)

1　はじめに

経営環境の悪化に伴って事業体が継続的に利益を上げることはとても難しくなってきた．そこで，利益を大きく左右するコストの妥当性を評価することが事業体にとって重要な課題のひとつとなっている．コストの妥当性を評価するためには，事業体の活動効率 (経営効率) 評価が基礎となる．経営効率の評価手法は数多くあるが [2]，本研究では DEA(Data Envelopment Analysis) を土台として議論を進める．

コスト効率という概念は Farrel によって提案された．Farrel のコスト効率は従来の DEA の入力要素を技術的要素 (人数，床面積など) とコスト要素 (人件費，賃貸料など) に分離させて考える．そして，現在のコストと同レベルの出力を前提として技術的要素を変化させて得られる最小のコストの比で測定される．しかし，Farrel のコスト効率は入力要素の確定的な価格情報を必要とし，それは一定であるという仮定を置く点に問題点があった．そこで文献 [1] では入力価格が不確かな場合に評価できるように Farrel のモデルを拡張した．このモデルは入力価格の最大/最小限しか分からない状況下で，コスト効率の上下限を求める．しかし，このモデルの下限値の求め方は，多数の線形計画問題（LP 問題）を解かねばならず，繁雑で非能率的である．本研究では Farrel のモデルにおいて，入力価格の最大/最小限しか分からない場合のコスト効率の下限値の求め方を提案する．

2　DEA

DEA では評価対象の事業体を DMU(Decision Making Unit) と呼ぶ．この DMU が n 個あるとし，これらを $\mathrm{DMU}_1,...,\mathrm{DMU}_n$ と表記する．各 DMU は同種の m 個の入力 (資源) を投入し，同種の s 個の出力 (便益) を産出しているとし，DMU_j の入力値を $x_{1j},...,x_{mj}$, 出力値を $y_{1j},...,y_{sj}$ とする ($j = 1,...,n$)．対象とする DMU を DMU_{j_o} とし，入力に対するウェイトを $v_1,...,v_m$，出力に対するウェイトを $u_1,...,u_s$ とする．DMU_{j_o} の効率値は (仮想的出力)/(仮想的入力) $=$ $(u_1y_{1j_o} + \cdots + u_sy_{sj_o})/(v_1x_{1j_o} + \cdots + v_mx_{mj_o})$ で測定する．ウェイトは全ての DMU の効率値が 1 以下になるように制限し，効率値が最大になるようにする．

図 1 に 1 入力 1 出力の例を示した．図 1 に示すように，効率的な活動 (少ない入力から多くの出力を産出する活動) によって形成される境界を効率的フロンティアと呼ぶ．効率的フロンティア上の DMU の効率値は 1 である．また与えられた全 DMU の活動によって規定される領域は生産可能領域と呼ばれ，仮想的 DMU の活動可能な範囲を示す．

図 1：1 入力 1 出力の例

3　Farrel のコスト効率

Farrel のコスト効率は現在の生産高を最小のコストで生産できる能力を評価する．Farrel のコスト効率は入力変数を技術的要素とコスト要素に分離して効率性を考える．ここで DMU_j の入力 (技術的要素) を $x_{1j},...,x_{mj}$，入力価格 (コスト要素) を $p_{1j},...,p_{mj}$，出力を $y_{1j},...,y_{sj}$ とする ($j = 1,...,n$)．それぞれの入力に入力価格を掛けたものの和が DMU_{j_o} の現在のコストで，技術的要素のみを取り上げ，効率値を求めたものを技術的効率値と呼ぶ．(1) 式は技術的要素と出力によって生産可能領域を

規定し, 与えられた入力価格で，コストを最小にする入力の組合わせを求める定式化である，x_i^o によって決まるコストは現在の入力価格で出力を保つことができる最小のコストで，x_i^o はコスト効率を最大にするために目標とする入力の組合せである．ここで，コスト効率を (最小のコスト)/(現在のコスト）と定義する．また，コスト効率は (2) 式のように入力項目のウェイトを入力価格の比に固定することによって求めることもできる．

$$
(1)\left|\begin{array}{ll}
\min & \sum_{i=1}^{m} p_{ij_o} x_i^o \\
\text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j = x_i^o, \quad i=1,...,m \\
 & \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \geq y_{rj_o}, \quad r=1,...,s \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j=1,...,n \\
 & x_i^o \geq 0, \quad i=1,...,m
\end{array}\right.
$$

$$
(2)\left|\begin{array}{ll}
\max & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj_o} \\
\text{s.t.} & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij_o} = 1 \\
 & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0, j=1,...,n \\
 & v_{i^a} - \frac{p_{i^a j_o}}{p_{i^b j_o}} v_{i^b} = 0 \\
 & i^a < i^b, \quad i^a, i^b = 1,...,m \\
 & u_r \geq 0, \quad r=1,...,s
\end{array}\right.
$$

しかし，Farrel のコスト効率には確定的な価格データの要求，価格は DMU に依らず一定であると仮定している点で限界がある．そのため Farrel のコスト効率は実際の適用において限界があると言われている [1]．そこで，文献 [1] は全 DMU の入力価格の最大/最小限しか分からない状況に対応できるよう Farrel のモデルを拡張した．

4 入力価格が不確かな場合のコスト効率

全 DMU の入力価格の最大/最小限しか分からない状況では，最も好ましい入力価格を考慮して評価したものを楽観的コスト効率と呼び，最も不利な入力価格を考慮して評価したものを悲観的コスト効率と呼ぶ．入力価格が不明確な状況では，楽観的コスト効率 (コスト効率の最大値)，悲観的コスト効率 (コスト効率の最小値) を求めることによって，Farrel のコスト効率の上下限を求める．楽観的コスト効率は (3) 式のように入力項目の比を与えられた範囲で変化させて, 目的関数を求める．悲観的コスト効率は楽観的コスト効率モデルの目的関数を最大から最小に変えるだけだと，全ての DMU の効率値は 0 になってしまう．そこで，(4) 式のように全ての DMU を潜在的な参照 DMU と考えて，制約条件に加えることで効率値が 0 になることを防ぐ．ここで参照 DMU とは DMU_{j_o} が効率的になるために目標とする DMU のことである．

$$
(3)\left|\begin{array}{ll}
\max & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj_o} \\
\text{s.t.} & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij_o} = 1 \\
 & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0, j=1,...,n \\
 & \frac{p_{i^a j_o}^{min}}{p_{i^b j_o}^{max}} \leq \frac{v_{i^a}}{v_{i^b}} \leq \frac{p_{i^a j_o}^{max}}{p_{i^b j_o}^{min}} \\
 & i^a < i^b, \quad i^a, i^b = 1,...,m \\
 & u_r \geq 0, \quad r=1,...,s
\end{array}\right.
$$

$$
(4)\left|\begin{array}{ll}
\min & \psi_{j_o j_p} = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj_o} \\
\text{s.t.} & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij_o} = 1 \\
 & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj_p} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij_p} = 0 \\
 & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0, j=1,...,n \\
 & \frac{p_{i^a j_o}^{min}}{p_{i^b j_o}^{max}} \leq \frac{v_{i^a}}{v_{i^b}} \leq \frac{p_{i^a j_o}^{max}}{p_{i^b j_o}^{min}} \\
 & i^a < i^b, \quad i^a, i^b = 1,...,m \\
 & u_r \geq 0, \quad r=1,...,s
\end{array}\right.
$$

また，悲観的コスト効率モデルは，全ての DMU を潜在的な参照 DMU と置くため，式が繁雑にな

り，全ての DMU の効率値を求めるには，n^2 個の LP 問題を解かなければならない．そこで，本研究では Farrel が提案した基本モデルに即して下限値をより効率的に求める方法を提案する．

5　下限値の新たな求め方

悲観的コスト効率は (2) 式を発展させて，(4) 式を解くことで求められている．しかし，(2) 式は楽観的コスト効率を求めるのには適しているが悲観的コスト効率を求めるのには適さない．そこで本研究では (1) 式を発展させることによって従来の悲観的コスト効率値を求められる定式化を提案する．

悲観的コスト効率とは，入力価格が不確かな状況下でコスト効率の最小値を求めることと言える．よって (5) 式のように入力価格に幅を持たせて，コスト効率の最小値を求めればよい．さらに，分母を 1 と固定して制約条件に移すことによって等価な 2 次計画問題を得られるが，この目的関数は凸関数ではないのでうまく探索できず，市販の非線形計画用ソルバでは最適解が求まらない場合がある．そこで，コスト効率の最小値が生産可能領域の端点で求められることに注目して問題を離散化し，(6) 式を解くことによって，悲観的コスト効率値を求められるようにした．

$$
(5)\quad
\begin{array}{ll}
\min & \dfrac{\sum_{i=1}^{m} p_{ij_o} x_i^o}{\sum_{i=1}^{m} p_{ij_o} x_{ij_o}} \\
\text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j = x_i^o, \quad i = 1,...,m \\
 & \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \geq y_{rj_o}, \quad r = 1,...,s \\
 & \dfrac{p_{i^a j_o}^{min}}{p_{i^b j_o}^{max}} \leq \dfrac{v_{i^a}}{v_{i^b}} \leq \dfrac{p_{i^a j_o}^{max}}{p_{i^b j_o}^{min}} \\
 & i^a < i^b, \quad i^a, i^b = 1,...,m \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1,...,n \\
 & x_i^o \geq 0, \quad i = 1,...,m
\end{array}
$$

$$
(6)\quad
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij_o} x_{ij}\lambda_j \\
\text{s.t.} & \sum_{i=1}^{m} p_{ij_o} x_{ij_o} = 1 \\
 & \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \geq y_{rj_o}, \quad r = 1,...,s \\
 & \dfrac{p_{i^a j_o}^{min}}{p_{i^b j_o}^{max}} \leq \dfrac{v_{i^a}}{v_{i^b}} \leq \dfrac{p_{i^a j_o}^{max}}{p_{i^b j_o}^{min}} \\
 & \lambda_j \in \{0, 1\} \\
 & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
 & i^a < i^b, \quad i^a, i^b = 1,...,m \\
 & x_i^o \geq 0, \quad i = 1,...,m
\end{array}
$$

6　実験と考察

表 1 のデータは仮想的な 8 つの銀行支店の活動で，入力 1，2 は総合職, 事務職 (人数)，入力価格 1，2 は人件費 (万円)，出力は売上 (億円) を表し，全ての支店の売上は 1 億円に換算してある．各支店の技術的効率値，コスト効率値，楽観的コスト効率値，悲観的コスト効率値を表 2 に示す．

表 1：仮想的な銀行支店の活動

DMU	入力 1	入力 2	入力単価 1	入力単価 2	出力 1
A 支店	39	21	45	25	1
B 支店	30	20	50	30	1
C 支店	45	25	40	25	1
D 支店	50	24	40	30	1
E 支店	35	26	45	30	1
F 支店	42	28	40	35	1
G 支店	37	15	45	25	1
H 支店	46	12	45	30	1

表 2：各支店の効率値

DMU	技術的効率値	コスト効率値	楽観的コスト効率値	悲観的コスト効率値
A 支店	0.847953	0.811404	0.827887	0.808081
B 支店	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
C 支店	0.725000	0.701031	0.701280	0.695652
D 支店	0.693780	0.661765	0.669014	0.645161
E 支店	0.857143	0.828025	0.833333	0.822511
F 支店	0.714286	0.714286	0.714286	0.714286
G 支店	1.000000	0.906863	0.947631	0.898876
H 支店	1.000000	0.802469	0.840708	0.769231

楽観的コスト効率と悲観的コスト効率は全ての DMU の入力価格の最大/最小限しか分からない状況で効率性を評価する．つまり，全ての DMU に対して入力価格 1 は (40〜50)，入力価格 2 は (25〜35) という情報しかない状況で効率性を評価する．また表 3，4 に (4)，(6) 式の実行結果を示す．表 3 の f は実行不可能を表している．

表 3:(4) 式の実行結果 (悲観的コスト効率値)

参照 DMU	A支店	B支店	C支店	D支店	E支店	F支店	G支店	H支店
A支店	f	f	f	f	f	f	f	f
B支店	0.80801	1	0.695652	0.645161	0.822511	0.714286	0.898876	0.769231
C支店	f	f	f	f	f	f	f	f
D支店	f	f	f	f	f	f	f	f
E支店	f	f	f	f	f	f	f	f
F支店	f	f	f	f	f	f	f	f
G支店	f	f	f	f	f	f	f	f
H支店	f	f	f	f	f	f	f	f

表 4:(6) 式の実行結果 (各 DMU の悲観的コスト効率値)

支店	A支店	B支店	C支店	D支店	E支店	F支店	G支店	H支店
効率値	0.80801	1	0.695652	0.645161	0.822511	0.714286	0.898876	0.769231

表 2 より，コスト要素を考慮して効率性を考えると，技術的に効率的なG，H支店も非効率的になっている．特に支店Hの場合，技術的に効率的でない A，E 支店より効率値が小さくなっている．つまり，少ない人数で効率的に活動ができているように見えるが，コストを抑えることができていないためにコスト効率は非効率的になっている．また，入力価格が不確かな状況下で，楽観的コスト効率，悲観的コスト効率が Farrel のコスト効率の上下限を構成している．楽観的コスト効率，悲観的コスト効率を求めることによって，Farrel のコスト効率の問題点を克服できている．次に，B 支店は全ての効率値が 1 になっていて，F 支店の効率値は全て一定の値になっている．これは，B 支店の場合，技術的に効率的で，さらにコストも抑えられているためコストを減らせるような目標となる支店がないため全ての効率値が 1 になってしまっている．つまり， B 支店は全ての支店の模範的な活動と言える．F 支店の場合，目標とする B 支店の入力と F 支店の入力の比が一定になっているため，効率値が全て一定になってしまっている．つまり，F 支店は B 支店の入力が 5/7 倍になっているが出力 (売上) が同じになっているため効率値も 5/7 倍になっている．

表 3 より，(4) 式でコスト効率の下限値を求めた結果，B 支店を参照 DMU とした時以外すべて実行不可能である．つまり，(4) 式は一つの DMU の効率値を求めるのに DMU の個数の LP 問題を解くことを必要としているが，その多くは実行不可能で，極めて非能率的な求め方と言える．また，(6) 式で得られた値は (4) 式で得られた値と一致している．

7　まとめ

本研究では，入力価格が不確かな状況下で，Farrel が提案したモデルを発展させることで下限値の新たな求め方を提案した．本研究で提案した方法は, 先行研究と比べ，簡潔で効率的なものである．

残念ながら，コスト要素は企業側が公開していないため，実例に適用してコスト効率を評価することができなかった．多くの実例に当てはめてコスト効率を評価し，その挙動を確認することは今後の課題である．

主要参考文献

[1] A.S.Camanho，R.G.Dyson: “ Cost efficiency measurement with price uncertainty:a DEA application to bank branch assessments ”，European Journal of Operational Research 161 pp．432-446，(2005)

[2] 刀根薫:「経営効率性の測定と改善」，日科技連出版社，(2001)