上下方向の移動を考慮した単一施設配置問題

山口　剛（沼田一道 助教授，田中健一 助手）

1. はじめに

都市施設の最適配置に関する研究は，過去様々な枠組みで行われてきた．なかでも，施設利用者の施設までの総移動コストを最小化する施設位置を決定する問題は，数多くの蓄積がある[1]．この問題は，Weber 問題やミニサム型施設配置問題などとよばれ，移動距離の定義，利用者の存在する空間，移動者分布等の与え方に関して様々なバリエーションモデルが提案されてきた．

しかし，高層建築物内の移動に着目すると，上下方向（垂直方向）の移動の所要時間が重要なファクターとなるが，このような視点から Weber 問題を発展させた研究は今までに行われていない．

そこで本研究では，高層建築物内の人々の移動を想定し，上下方向の移動を考慮した単一施設配置モデルを提案する．本研究では，単純な数理モデルを用いて最適解の性質を明示的に分析することに重点を置き，様々な一般化を行う際の基本モデルを提案することを目的とする．提案したモデルに東京理科大学神楽坂キャンパスの例をあてはめて解を出力し分析を行う．

2. 既存の Weber 問題の紹介と本モデルの定式化

Weber 問題とは，平面上に離散的に分布する施設利用者を想定し，各利用者の施設までの移動コストの和を最小化する単一施設の位置を決定する問題である[1, 3]．以下に Weber 問題を紹介する．

図 1 に示すように，平面上に n 個の需要点 p_i $(i=1,\cdots,n)$ が与えられ，w_i 人の施設利用者が存在する．施設を点 q に置くとし，点 p と点 q の距離を $d(p,q)$ で表すことにすると，施設までの総移動距離は

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot d(p_i, q) \tag{1}$$

で与えられる．これを最小化する施設位置 q を決定する問題が Weber 問題である．以下ではこのモデルを上下方向の移動を考慮し，利用者がビルの高さ方向に沿って連続的に分布したものに拡張する．ここで以下を仮定する：

- 高さのみを考慮した n 本のビルが建っている．
- 各ビルには施設利用者が一様かつ連続的に分布している．
- 地上での移動は 2 方向の移動のみを考え，移動距離を直交距離（マンハッタン距離）で測る．
- ビル内の上下方向の移動はエレベータにより行い，地上での移動は徒歩によるものとする．

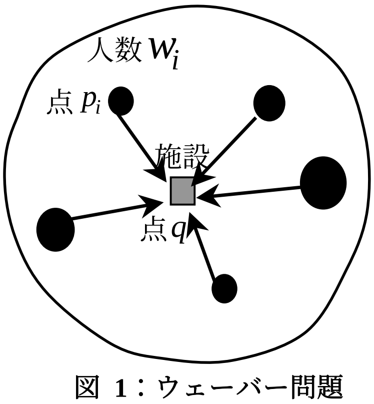


図 1：ウェーバー問題

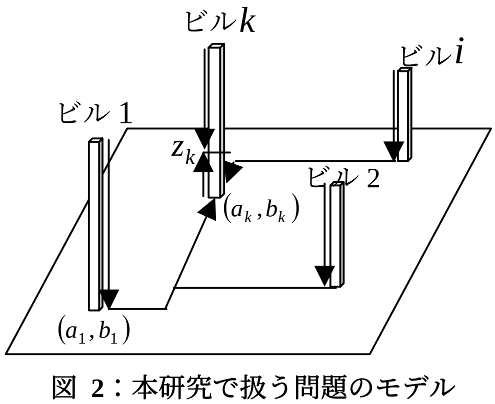


図 2：本研究で扱う問題のモデル

総所要時間を最小化する施設位置を決定する問題を数理計画問題として定式化すると以下のようになる：

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot T_i(z_i) + u_0 \cdot T_0(x, y), \tag{2}$$

$$\text{s.t.} \quad u_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i = 1. \tag{3}$$

ここで，u_i はビル i に施設を配置するときに 1，そうでないときに 0 をとる変数であり，u_0 は地上に施設を配置するときに 1，そうでないときに 0 をとる変数である．$T_i(z_i)$ はビル i の高さ z_i の所に施設を設けたときの総所要時間，$T_0(x,y)$ は地上の点 (x,y) に施設を設けたときの総所要時間を表し，次節で具体的に説明する．

3. 問題の解法

ビル i の位置を (a_i, b_i)，ビル i の高さを h_i，ビルの i 内にいる人数を N_i と表す．また，エレベータの速度を v_{v}，徒歩の速度を v_{h} とする．

3.1. 最適位置がビル内にある場合

ビル k 内の高さ z_k の所に施設が置かれたときの目的関数は以下の通りとなる：

$$T_k(z_k) = \frac{N_k}{v_{\mathrm{v}}} \cdot \left(\frac{z_k^2}{h_k} - z_k + \frac{h_k}{2} \right) + \sum_{i \neq k}^{n} N_i \cdot \left\{ \frac{1}{v_{\mathrm{v}}} \cdot \left(\frac{h_i}{2} + z_k \right) + \frac{|a_i - a_k| + |b_i - b_k|}{v_{\mathrm{h}}} \right\}. \tag{4}$$

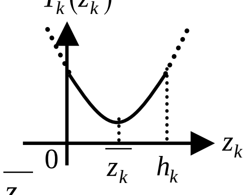
ここで第 1 項は，ビル k 内の人々の施設までの所要時間を表し，第 2 項はビル k 以外のビルにいる人々の施設までの所要時間を表す．以下にこの式の導出方法を示す．ビル k 内の人々の施設までの所要時間を t_k とすると，t_k は以下の積分を実行することで求められる：

$$t_k = \frac{N_k}{v_{\mathrm{v}}} \cdot \int_{z=0}^{h_k} f(z) |z - z_k| \cdot \mathrm{d}z = \frac{N_k}{v_{\mathrm{v}}} \cdot \frac{1}{h_k} \int_{z=0}^{h_k} |z - z_k| \cdot \mathrm{d}z. \tag{5}$$

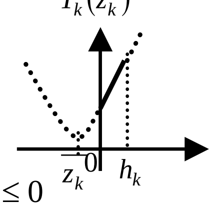
ここで $f(z) = \dfrac{1}{h_k}$ はビル k 内に利用者が一様に分布する場合の密度関数を表している．(4)式より，目的関数 $T_k(z_k)$ は，高さ z_k に関する上に開いた 2 次関数となることが分かる．いま，関数 $T_k(z_k)$ の軸を $\overline{z_k}$ とする．(4)式を変形し，平方完成を行い軸の位置 $\overline{z_k}$ を求めると，以下の通りとなる：

$$\overline{z_k} = \frac{h_k \cdot \left(N_k - \sum_{i \neq k}^{n} N_i \right)}{2N_k}. \tag{6}$$

軸の位置 $\overline{z_k}$ は，i) $0 < \overline{z_k}$ の場合と，ii) $\overline{z_k} \leq 0$ の場合の 2 通りが考えられる．i) の場合，$\overline{z_k} < h_k$ を考慮すると関数は $z = \overline{z_k}$ で最小値をとることがわかる．このとき，最適位置はビル k 内に実現する．



i) $0 < \overline{z_k}$



ii) $\overline{z_k} \leq 0$

図 3：関数 $T_k(z_k)$ の場合分け

以上より最適位置がビル k 内に実現されるための条件は以下のようになる：

$$N_k > \sum_{i \neq k}^{n} N_i. \tag{7}$$

(7)式は，ビル k 内にいる人数が残りの $n-1$ 個のビルにいる人数の和より多ければ，最適位置がビル k 内に実現することを示している．最適解 z_k^* は目的関数 $T_k(z_k)$ の軸の位置と一致する：

$$z_k^* = \overline{z_k} = \frac{h_k}{2} - \frac{h_k \cdot \sum_{i \neq k}^{n} N_i}{2N_k}. \tag{8}$$

また，最適解が与える目的関数値 $T_k(z_k^*)$ は以下のようになる：

$$T_k(z_k^*) = \frac{N_k^2 + 2N_k \cdot \sum_{i \neq k}^{n} N_i - \left(\sum_{i \neq k}^{n} N_i\right)^2}{4N_k} \cdot \frac{h_k}{v_\mathrm{v}} \cdot + \sum_{i \neq k}^{n} N_i \cdot \left(\frac{1}{v_\mathrm{v}} \cdot \frac{h_i}{2} + \frac{|a_i - a_k| + |b_i - b_k|}{v_\mathrm{h}}\right). \tag{9}$$

ii)の場合は，$z_k = 0$ で最小値をとることがわかる，つまりビル k 内には最適位置が実現しない．

3.2. 最適位置が地上にある場合

どのビルにも最適位置が実現されない場合，つまり $N_k \leq \sum_{i \neq k}^{n} N_i$ が全てのビルについて成り立つときには，地上に最適位置が実現する．このときは，2 次元の直交距離の Weber 問題に帰着され，従来の方法で解を得ることができる．以下に 2 次元の直交距離の Weber 問題に帰着されることを示す．地上の点 (x, y) に施設を置いたときの目的関数は以下のようになる：

$$T_0(x, y) = \sum_{i=1}^{n} N_i \cdot \left[\frac{1}{v_\mathrm{v}} \cdot \frac{h_i}{2} + \frac{1}{v_\mathrm{h}} \cdot \left\{ |a_i - x| + |b_i - y| \right\}\right]. \tag{10}$$

(10)式より目的関数 $T_0(x, y)$ は x 軸方向の移動と y 軸方向の移動に分割して表現することができ，次のように書きかえることができる：

$$\begin{aligned} T_0(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_\mathrm{v}} \cdot \frac{h_i}{2} \times N_i + \Bigg\{ & \frac{1}{v_\mathrm{h}} \cdot \left(|a_1 - x| \cdot N_1 + |a_2 - x| \cdot N_2 + \cdots |a_n - x| \cdot N_n \right) \\ & + \frac{1}{v_\mathrm{h}} \cdot \left(|b_1 - y| \cdot N_1 + |b_2 - y| \cdot N_2 + \cdots |b_n - y| \cdot N_n \right) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{11}$$

ここで，第 2 項は 2 次元の直交距離の Weber 問題に他ならない[3]．第 1 項は定数だから，地上に最適位置が出現する場合の問題は，2 次元の直交距離の Weber 問題に帰着されることが示された．

4. 数値実験

東京理科大学神楽坂キャンパスの校舎を対象にしてモデル分析を行う．校舎にいる人々が一度だけ訪れる施設の例として教科書販売所を取り上げる．教科書販売所の位置と，モデルから求めた最適位置とを比較し，2 つの状況における所要時間分布による分析を行う．作成したデータを以下に示す．ビル内の人数は各校舎の，面積，教室数，研究室数，実験室数を考慮に入れて神楽坂キャンのパスの学生数

6400 人を比例配分したものである．また，エレベータ速度 $v_{\mathrm{v}} = 50$ m/分（停止時間を考慮した平均的なエレベータ速度），徒歩の速度 $v_{\mathrm{h}} = 66.67$ m/分（人間の平均的な歩行速度 4.0 km/時）とした．

表 **1**：各ビルのデータ

	高さ [m]	ビル内の人数 [人]
1号館	119	1192
2号館	42	546
3号館	63	2270
6号館	28	508
7号館	63	337
8号館	42	718
9号館	77	829
合計	434	6400

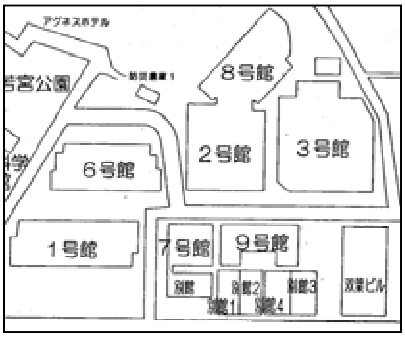


図 4：神楽坂キャンパス

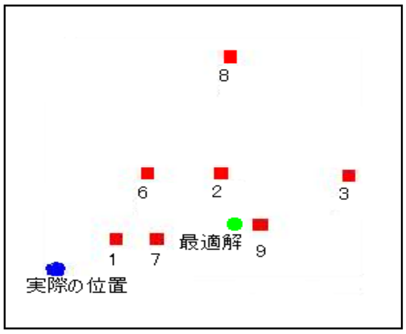


図 5：校舎位置の概略図

現行の配置位置とモデルを用いて得られる最適位置のそれぞれについて, 所要時間分布を比較したものを図 6 に示す．図中の矢印が指している値はそれぞれの配置位置での平均所要時間である．

この図より，最適位置での所要時間分布の方が現行位置での分布より大きくに左に寄っており，最適位置では所要時間が全体的に減少している様子が見て取れる．しかし，最大所要時間に着目すると，最適位置の方が現行位置よりも大きくなってしまっていることが分かる．実際に施設を配置する際には，最も不利益を被る人の所要時間も考慮すべきであるかもしれない．

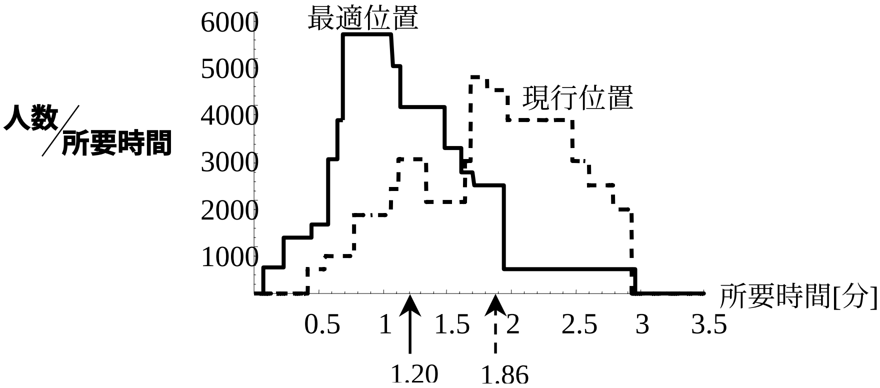


図 6：所要時間分布

5. まとめ

本研究では上下方向移動を考慮した単一施設配置問題のモデルを提案し, 解を明示的に示すことができた.「ビル k 内にいる人数が残りの $n-1$ 個のビルにいる人数の和よりも多ければ, 最適位置がビル k 内に実現する」という非常に見通しのよい結果を得た．本モデルは，高層ビル群や大学のキャンパス内などに配置する施設の位置を考える際の基本モデルとして位置付けられる. 今回提案したモデルをもとに,「人口密度がビル内で異なる場合」や「ビルを直方体にした場合」にも拡張することができる．また，今回のモデルで考慮しなかった「移動者のエレベータ待ち時間」や「ビル間をつなぐ連絡通路」などを取り入れて，より現実的な分析を行うことが今後の課題である．

主要参考文献

[1] Z. Drezner and H. W. Hamacher　(2001): *Facility Location*, Springer.

[2] 腰塚武志 (1998)：移動時間分布からみた超高層建築物の分析, 日本都市計画学会学術論文集, No. 35, pp. 325-330.

[3] 栗田　治 (2004)：『都市モデル読本』，共立出版.