上下方向の移動を考慮した単一施設配置問題

沼田研究室
4402087　山口　剛

発表構成

1. はじめに
2. 研究目的
3. 上下方向移動を考慮した問題
4. 最適位置の導出
5. 数値実験
6. 発展モデル
7. まとめと今後の課題

1. はじめに

都市における施設の配置問題は，これまでに様々なモデルが提案されており，多くの蓄積がある

代表例

(ミニサム型)

総移動コストを最小化する施設の位置を決定する問題

Weber問題と呼ぶ！

利用者全体の負担をできるだけ小さくする

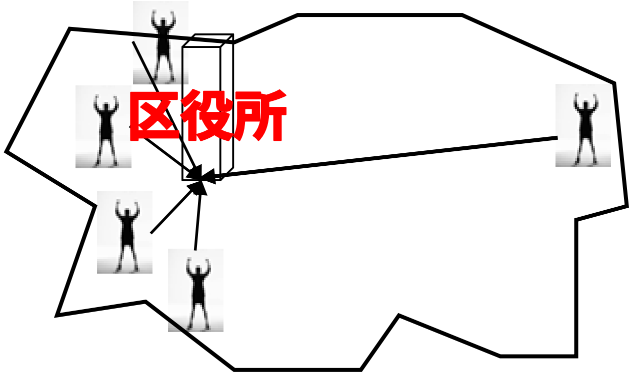


図1.1：ミニサム型問題

(ミニマックス型)

最大移動時間を最小化する施設の位置を決定する問題

最も不利益を被る人の負担をできるだけ小さくする

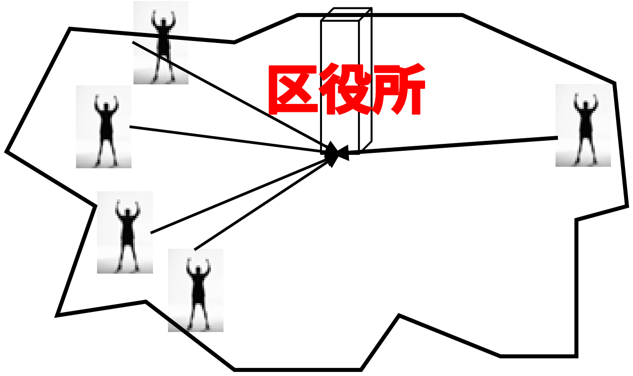


図1.2：ミニマックス型問題

研究背景

既存の施設配置モデルでは上下方向の移動が考慮されていない

しかし

ビル内での上下方向の移動は無視できない！

図1.3：都心の高層ビル例（品川駅周辺，東京理科大学）

2. 研究目的

上下方向の移動を考慮した
Weber問題（ミニサム型問題）のモデルの提案

⇩

最適解の性質を明示的に分析する

（例） 理科大神楽坂キャンパスの
教科書販売所の最適位置

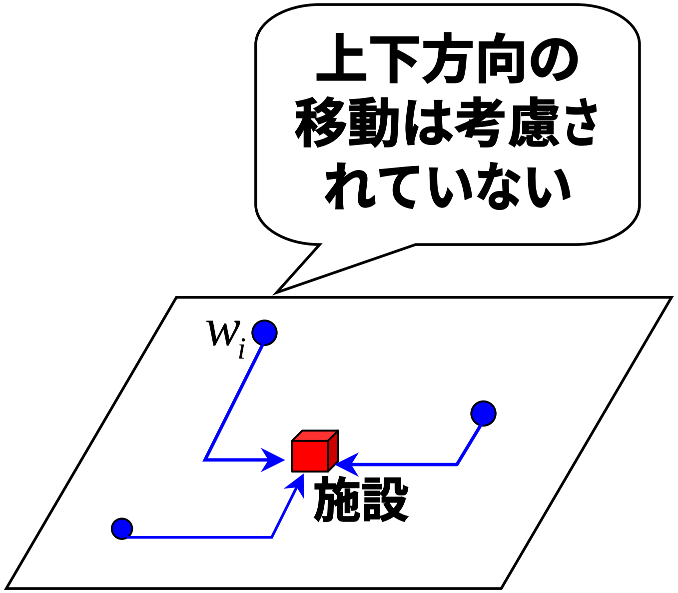


図2.1：直交距離のWeber問題
（既存モデル）

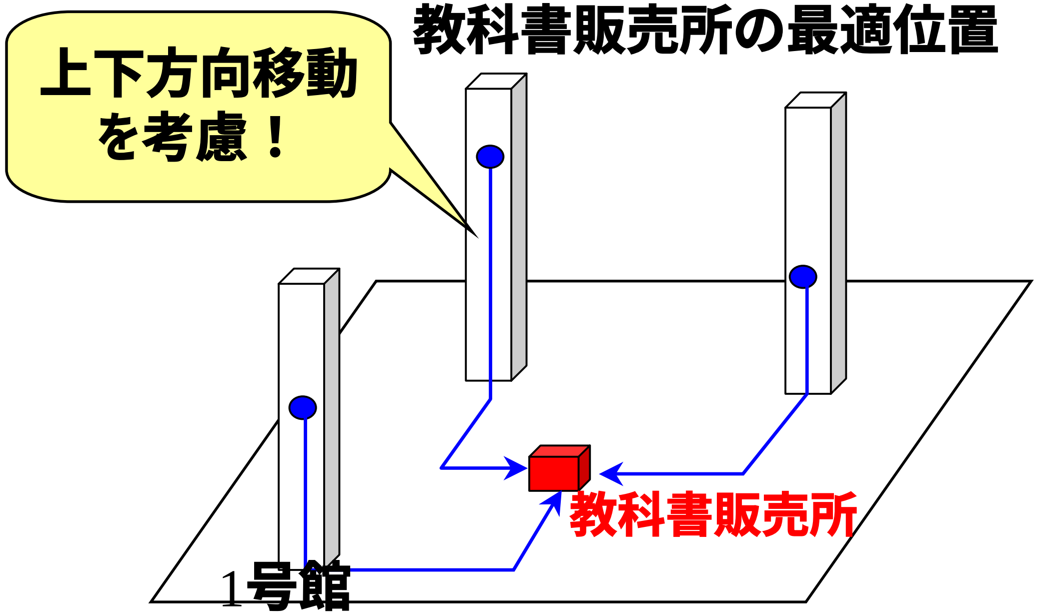


図2.2：本研究で扱う問題の概念図
（提案モデル）

3. 上下方向移動を考慮した問題

モデルの仮定

単純な仮定を用いる

1. ビルは**高さのみ**を考慮する (ビル内の水平方向の移動は無視) ;
2. 利用者は各ビルにのみ存在し, 高さ方向に**一様かつ連続的**に分布している;
3. ビル内の上下方向は**エレベータ**で移動し地上では**徒歩**で移動する;
4. 地上では2方向のみの移動を考え**直交距離**により距離を測る;

(**直交距離**:格子状道路に沿った距離)

5. 利用者は**最短所要時間**を実現する経路を選択する;
6. 施設はビル内および地上の**任意の地点に配置可能**である.

h_i	:	ビルiの高さ
N_i	:	ビルi内の人数
v_h	:	徒歩での移動速度
v_v	:	エレベーターの移動速度
(a_i, b_i)	:	ビルiの建っている座標

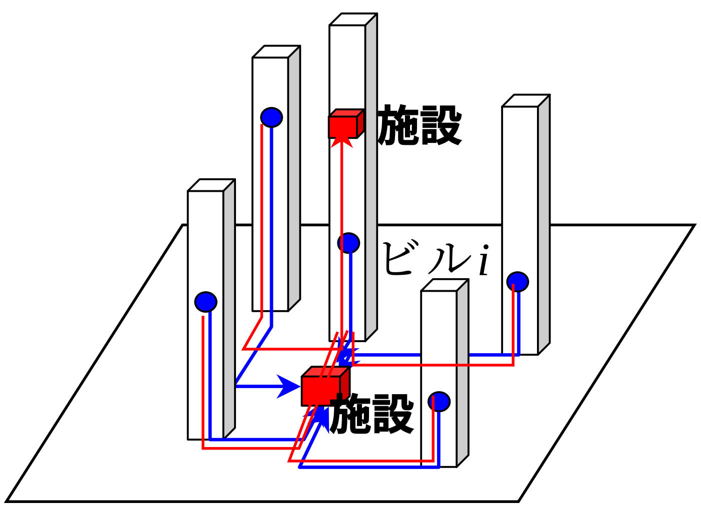


図3.1:モデルの概念図

総所要時間最小化問題の定式化

(P) min $T(\mathbf{z}, x, y, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \underline{T_i(z_i)} + u_0 \cdot \underline{T_0(x, y)}$

s.t $u_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i = 1$

ビルi 内の高さ z_i の位置に施設を設けるときの総所要時間

地上の点 (x, y) に施設を設けるときの総所要時間

$\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_n)$, $\mathbf{u} = (u_0, u_1 \cdots, u_n)$

ただし

$(i \neq 0)$ $u_i = \begin{cases} 1 & \text{ビルi に施設を配置するとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$

$u_0 = \begin{cases} 1 & \text{地上に施設を配置するとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$

4．最適位置の導出

最適解とその解が現れる条件

表4.1：最適解とその解が現れる条件

最適位置	ビルk内	地上
条件	ビルk内の人数が，残りのビルにいる人数の和よりも多いこと $$N_k > \sum_{i \neq k} N_i \qquad (4.1)$$	どのビル内にも最適位置が現れないこと $$N_k \leq \sum_{i \neq k} N_i \quad (k = 1, \cdots, n) \qquad (4.2)$$
最適解	$$\frac{h_k}{2} - \frac{h_k \cdot \sum_{i \neq k} N_i}{2N_k} \qquad (4.3)$$	2次元のWeber問題に帰着するので，既存の方法で最適解を求めることができる

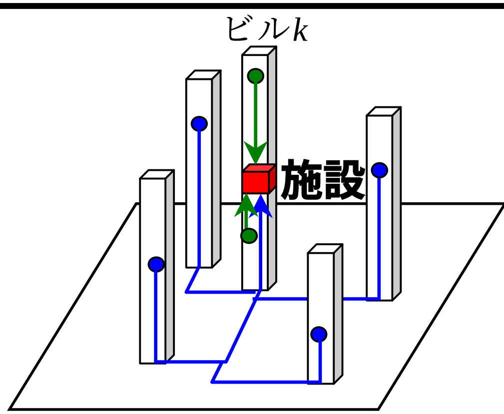


図4.1：ビルk内に施設を配置した場合

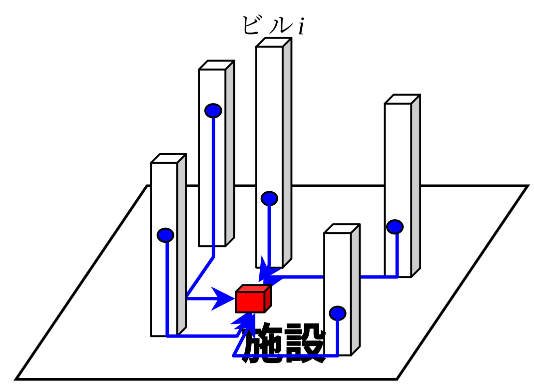
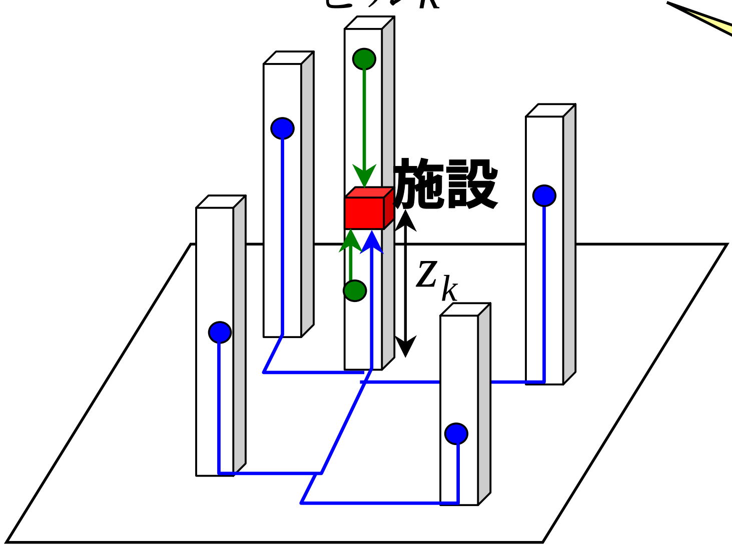


図4.2：地上に施設を配置した場合

ビル内に施設を配置したときの目的関数

ビル k の高さ z_k の位置に施設を配置したときの、人々の総所要時間 $T_k(z_k)$

$$T_k(z_k) = \underbrace{\frac{N_k}{v_v} \cdot \left(\frac{z_k^2}{h_k} - z_k + \frac{h_k}{2} \right)}_{\text{ビルk内の人の総所要時間}} + \underbrace{\sum_{i \neq k} N_i \cdot \left\{ \frac{1}{v_v} \cdot \left(\frac{h_i}{2} + z_k \right) + \frac{|a_i - a_k| + |b_i - b_k|}{v_h} \right\}}_{\text{ビルk以外のビル内の人の総所要時間}} \tag{4.4}$$



$T_k(z_k)$ **は下に凸の2次関数である**

図4.1：ビルk内に施設を配置した場合（再掲）

ビルk 内の人の総所要時間 t_k

$f(z)$：z における人口の密度関数 ➡ $$\int_0^{h_k} f(z)\cdot \mathrm{d}z = 1 \qquad (4.5)$$

人口はビル内に一様かつ
連続的に分布しているので ➡ $$f(z) = \frac{1}{h_k} \qquad (4.6)$$

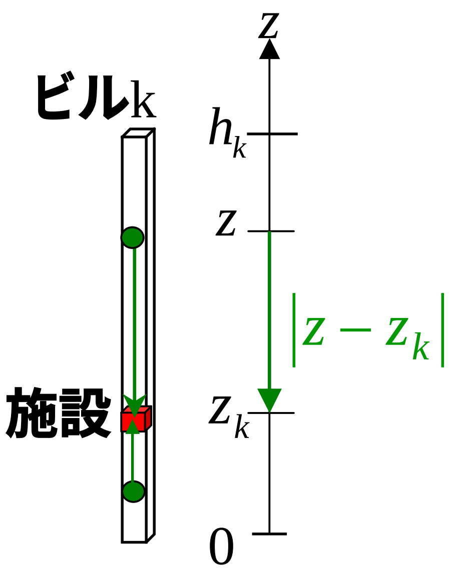


図4.3：ビルk内の人の移動

$$t_k = \int_{z=0}^{h_k} \frac{|z - z_k|}{v_{\mathrm{v}}} \cdot N_k \cdot f(z)\cdot \mathrm{d}z \qquad (4.7)$$

$$= \frac{N_k}{v_{\mathrm{v}}} \cdot \left(\frac{z_k^{\,2}}{h_k} - z_k + \frac{h_k}{2} \right)$$

ビルk内に最適位置が現れるための条件

$T_k(z_k)$は上に開いた2次関数である

関数 $T_k(z_k)$ の軸を $\overline{z_k}$ とする

注：$0 < z_k \leq h_k$

下の二つの場合が考えられる

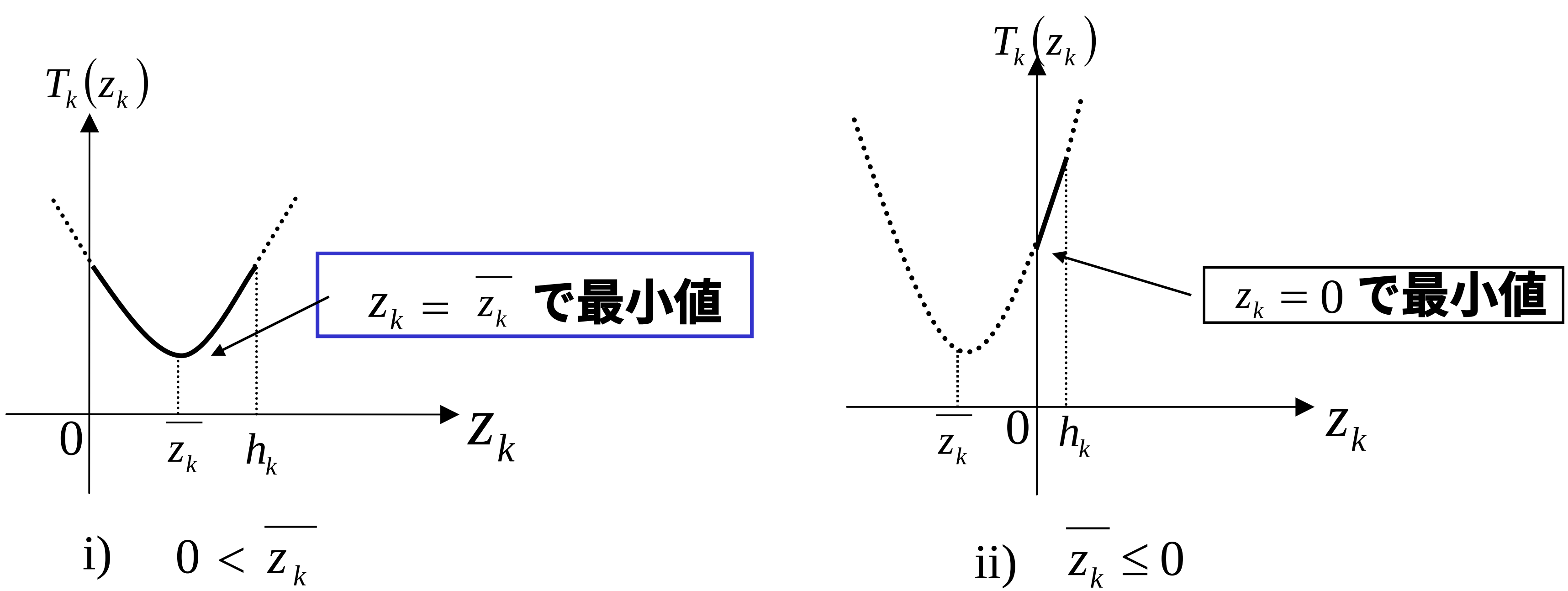


図4.4：関数 $T(z_k)$の場合分け

ビルk内に最適位置が現れるための条件

$\boxed{\overline{z_k} > 0}$ であればビルk内に最適位置が現れる

(4.1)式を変形して平方完成

$$T(z_k) = \frac{N_k}{v_v \cdot h_k} \cdot \left(z_k + \frac{h_k \cdot \left(\sum_{i \neq k} N_i - N_k \right)}{2N_k} \right)^2 + C_1 \quad (4.7)$$

$\Longrightarrow$

$$\overline{z_k} = \frac{h_k \cdot \left(N_k - \sum_{i \neq k} N_i \right)}{2N_k} \quad (4.8)$$

これがビルk内に最適位置が現れるための条件！

条件は・・・

$$\overline{z_k} = \frac{h_k \cdot \left(N_k - \sum_{i \neq k} N_i \right)}{2N_k} > 0$$

$\Longrightarrow$

$$N_k > \sum_{i \neq k} N_i \quad (4.1)$$

ビルk内に最適位置が現れるための条件とその時の最適解

ビルk内にいる人数　＞　残りのn-1個のビルにいる人数の和
であれば最適位置がビルk内に現れる

最適解を z_k^* とする

$$z_k^* = \overline{z}_k = \frac{h_k}{2} - \frac{h_k \cdot \sum_{i \neq k} N_i}{2N_k} \qquad (4.3)$$

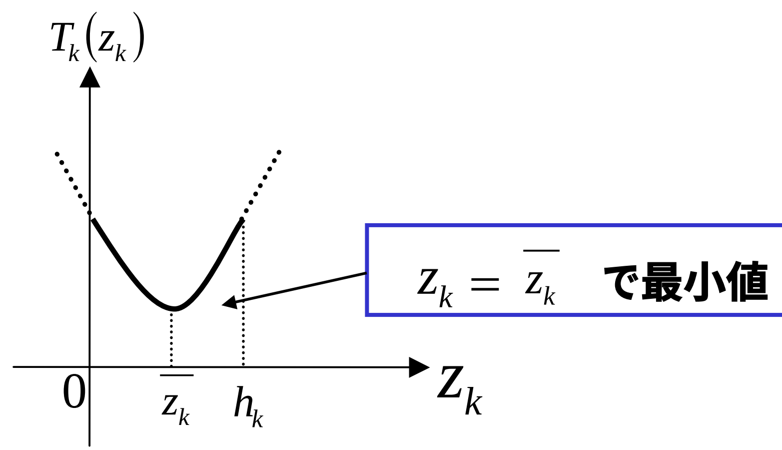


図4.5：$0 < \overline{z}_k$ のときの$T_k(z_k)$

地上に最適位置が現れるための条件

どのビル内にも最適位置が実現されない場合

$$N_k \le \sum_{i \ne k} N_i \qquad (k = 1 \cdots n) \qquad (4.2)$$

➡ **地上に最適位置が現れる**

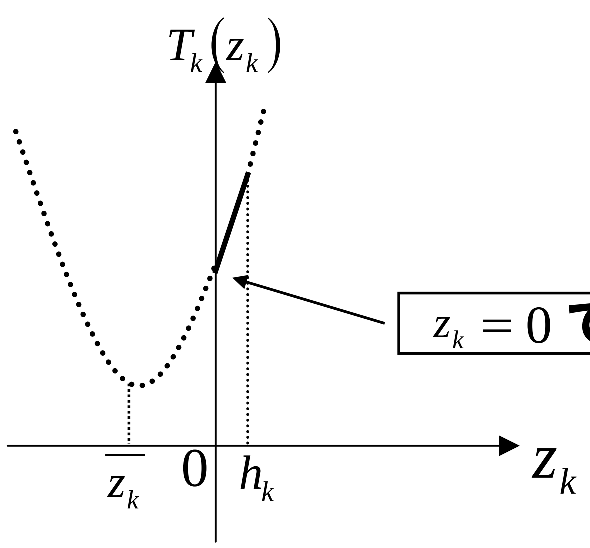


図4.6： $\overline{z_k} \le 0$ のときの$T_k(z_k)$

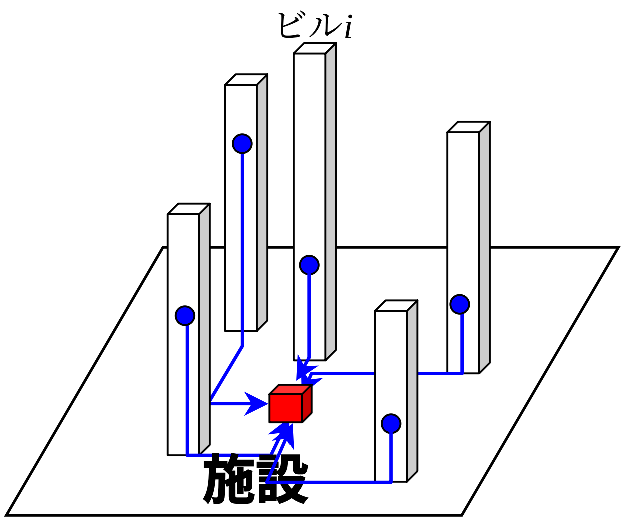


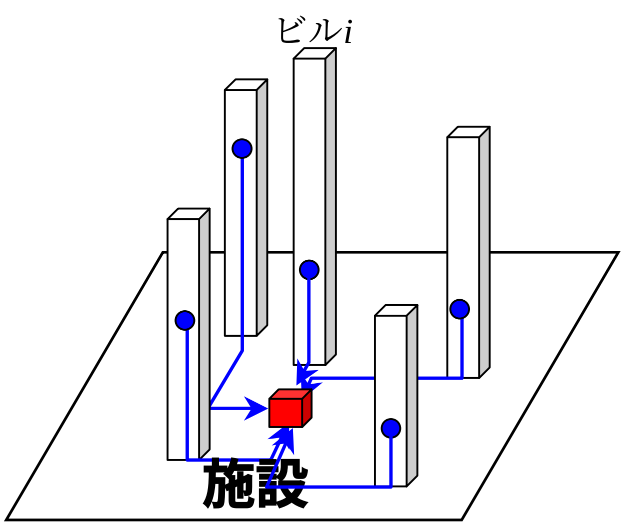
図4.2：地上に施設を配置した場合（再掲）

地上に施設を配置したときの目的関数

地上の点 (x,y) に施設を配置したときの，人々の総所要時間 $T_0(x,y)$ は

$$T_0(x,y)=\underbrace{\frac{1}{v_{\mathrm{v}}}\cdot\sum_{i=1}^{n}N_i\cdot\frac{h_i}{2}}_{\text{上下方向での移動の総所要時間}}+\underbrace{\frac{1}{v_{\mathrm{h}}}\sum_{i=1}^{n}N_i\cdot\left(|a_i-x|+|b_i-y|\right)}_{\text{地上での移動の総所要時間}} \qquad (4.9)$$

目的関数の第一項は定数 ⇒ **2次元の直交距離のWeber問題に帰着！**



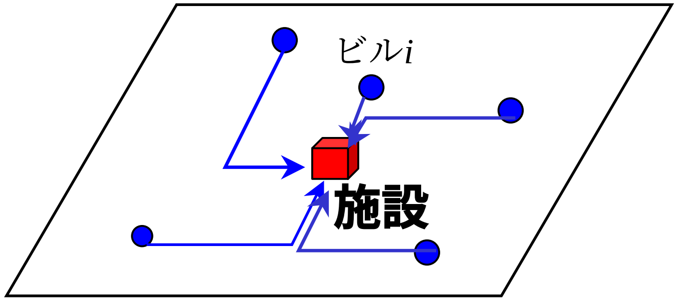


図4.2：地上に施設を配置した場合（再掲）　　**図4.7：直交距離のWeber問題**

5．数値実験

提案したモデルに東京理科大学神楽坂キャンパスの例をあてはめる

表5.1：各校舎のデータ

	高さ [m]	ビル内の人数 [人]
1号館	119	1192
2号館	42	546
3号館	63	2270
6号館	28	508
7号館	63	337
8号館	42	718
9号館	77	829
合計	434	6400

校舎にいる学生が一度だけ訪れる施設の例

⇩

教科書販売所

所要時間分布による分析を行う

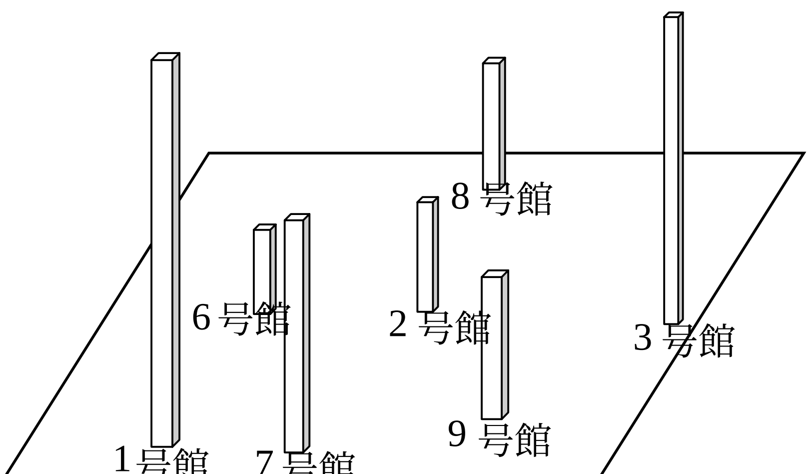


図5.1：神楽坂キャンパス

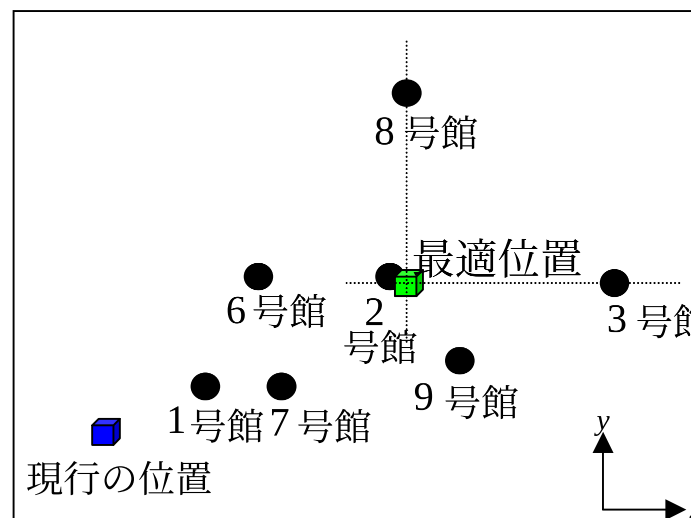
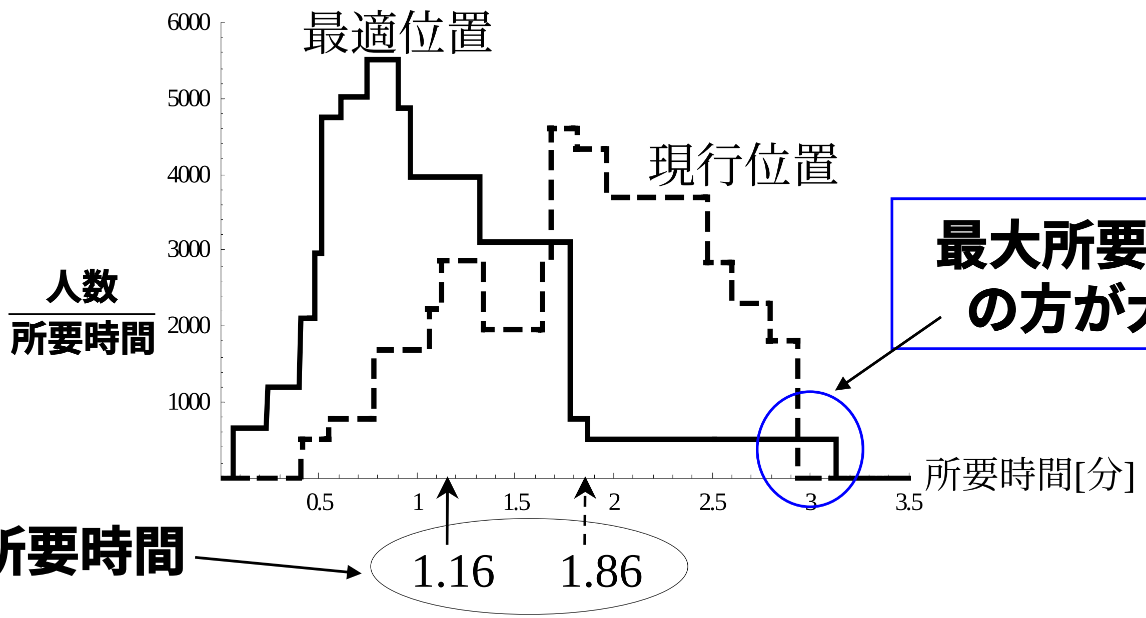


図5.2：校舎位置と最適位置

所要時間分布による分析



最大所要時間は最適位置の方が大きくなっている

平均所要時間

図5.3：最適位置と現行位置での所要時間分布

最適位置での所要時間分布の方が左に寄っている

⇩

人々の所要時間は全体的に減少している

最大所要時間かかる人は

⬇

現行位置では3号館の頂上にいる人

最適位置では1号館の頂上にいる人

大きな負担を被る人が出ないような位置を求めと・・・

最大所要時間を最小化する位置

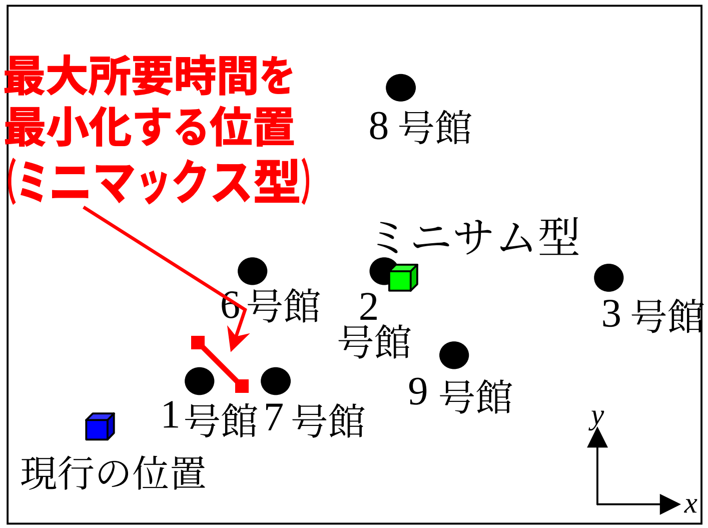


図5.4：ミニマックス型問題の最適位置

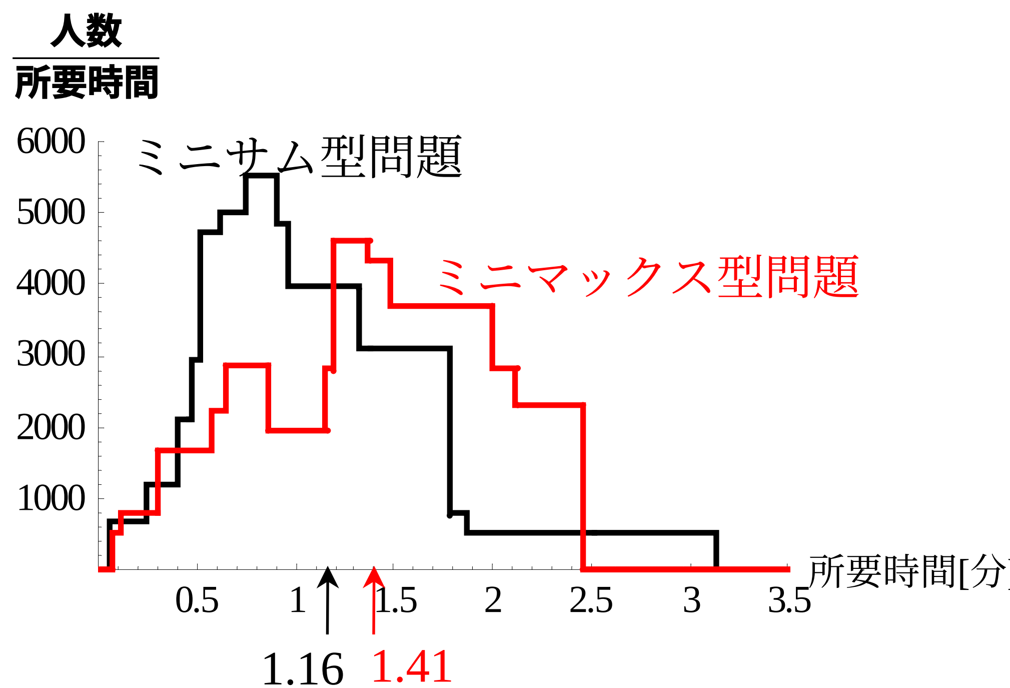


図5.5：2つの場合での所要時間分布

最大所要時間

ミニサム型		ミニマックス型
3.13分	→	2.45分
1号館の頂上にいる人		1号館と3号館の頂上にいる人

6．発展モデル

提案したモデルは非常に理想化された世界を考えている

利用者はビル内に一様に分布している

現実的ではない

ビル内で利用者がいる部分といない部分があるモデルを考える

区間によって
人口密度は異なる！
(区間内では一様)

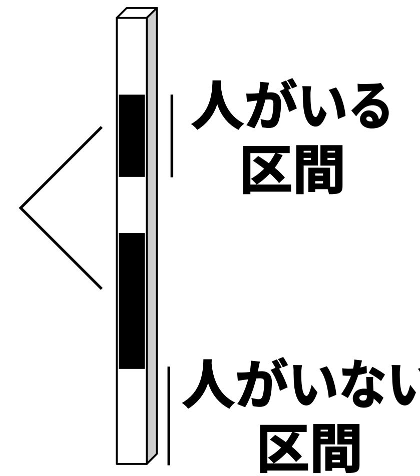


図6.1：ビル内の人の分布

この仮定を新たに導入して問題を解くと・・・

発展モデルを解くことによって得た新たな知見

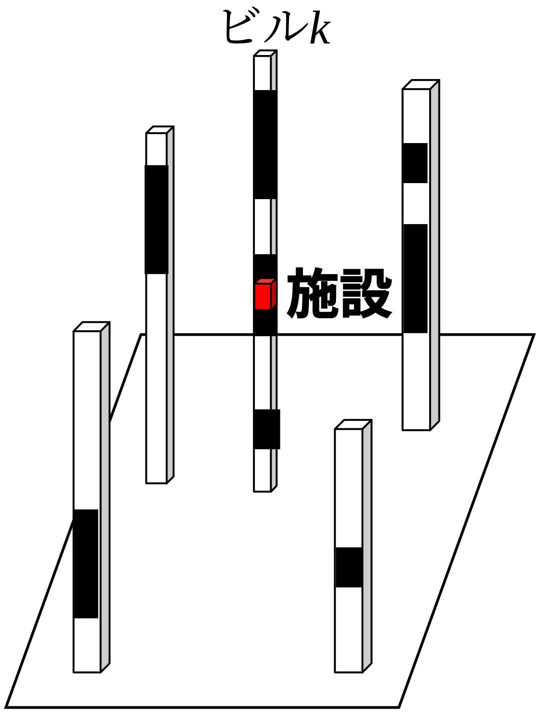


図6.2：発展モデル

利用者がいない区間には最適位置が現れることはない

ビル内に最適位置が現れるためには

⬇

施設を置いた区間とそれより上にいる利用者数の和 ＞ 残りの利用者数

地上に最適位置が現れるときは ➡ **2次元の直交距離のWeber問題に帰着**

初めに提案したモデルよりも現実に即したモデルに発展させることができた！

7．まとめと今後の課題

まとめ

上下方向移動を考慮した
単一施設配置問題のモデルを提案

↓

最適解を明示的に示すことが出来た！

本モデルは高層ビル群や大学のキャンパス内に施設を配置する際の，基本モデルとして有用である

今後の課題

「ビル間の連絡通路」や「エレベータの待ち時間」などを考慮に入れて，より現実的な分析を行う

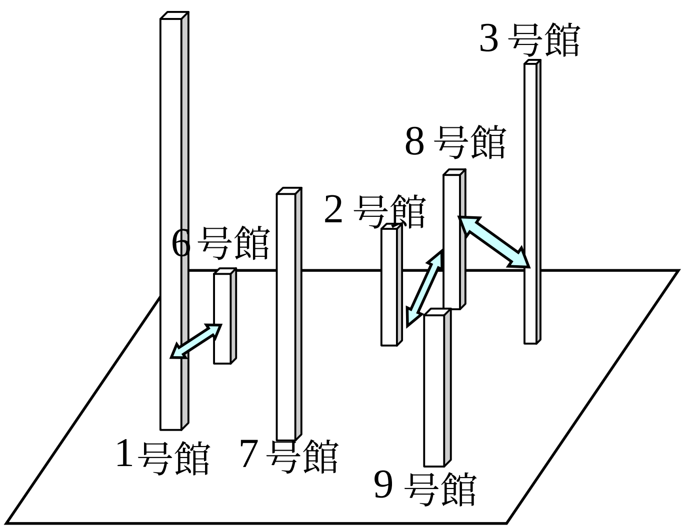


図7.1：**ビル間をつなぐ連絡通路**

参考文献

[1] Z. Drezner (1996): *Facility Location*, Springer.

[2] Z. Drezner and H. W. Hamacher (2001): *Facility Location*, Springer.

[3] 腰塚武志 (1998)：移動時間分布からみた超高層建築物の分析, 日本都市計画学会学術論文集, No. 35, pp. 325-330.

[4] 栗田　治 (2004)：『都市モデル読本』, 共立出版.

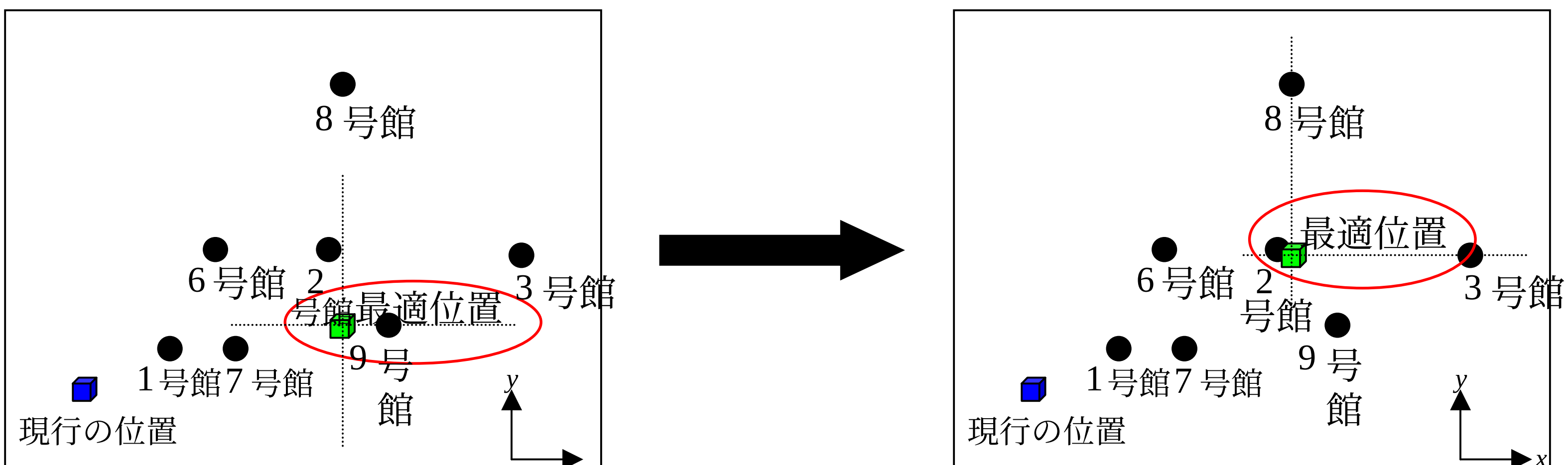
[5] 東京理科大学 (2005)：『東京理科大学の現状と課題』, 学校法人 東京理科大学.

抄録訂正

p.130-131:(4),(6),(7),(8),(9)式 , p131:10行目

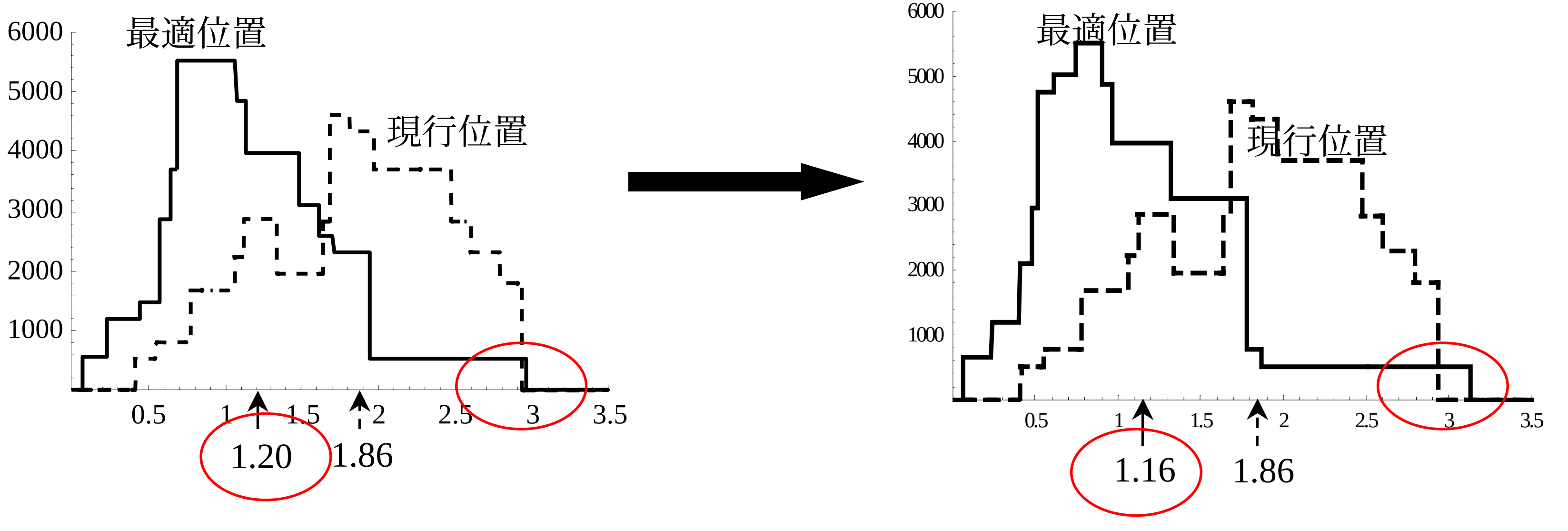
$$\sum_{i \neq k}^{n} N_i \longrightarrow \sum_{i \neq k} N_i$$

p.132:図5「校舎位置の概略図」の最適位置について



抄録訂正

p.132:図6「所要時間分布」の最適位置の所要時間分布について



付録

ミニサム型問題の目的関数値

最適解 z_k^* における総所要時間(目的関数値)

$$z_k = z_k^* = \frac{h_k}{2} - \frac{h_k \cdot \sum_{i \neq k} N_i}{2N_k}$$ を(4.4)式に代入する

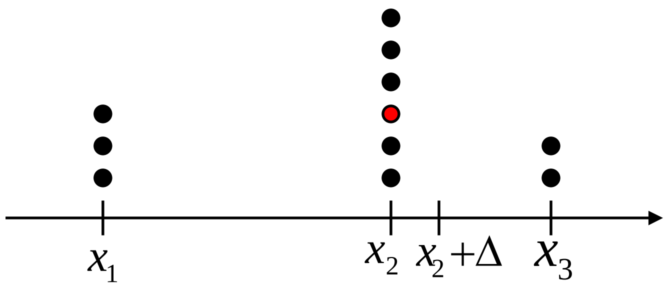
利用者の総所要時間

$$T_k\left(z_k^*\right) = \frac{N_k^2 + 2N_k \cdot \sum_{i\neq k} N_i - \left(\sum_{i\neq k} N_i\right)^2}{4N_k} \cdot \frac{h_k}{v_{\mathrm{v}}} + \sum_{i\neq k} N_i \cdot \left(\frac{1}{v_{\mathrm{v}}} \cdot \frac{h_i}{2} + \frac{\left|a_i - a_k\right| + \left|b_i - b_k\right|}{v_{\mathrm{h}}}\right).$$

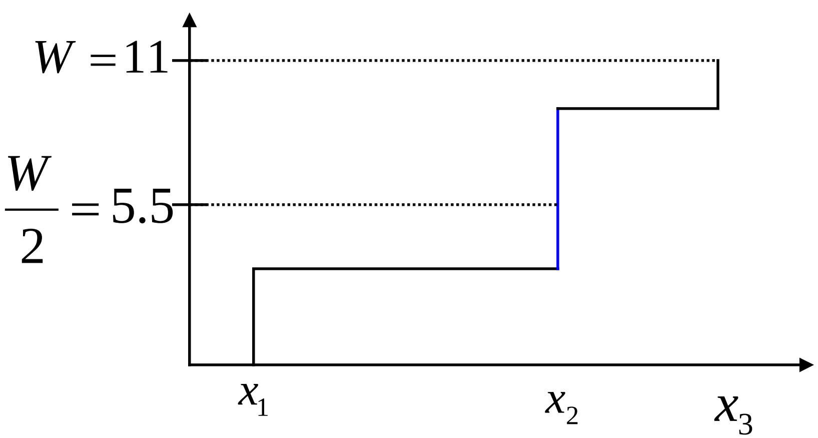
<u>直交距離のWeber問題</u>

$\frac{W}{2}$をこえる点が最適解になることについて

例



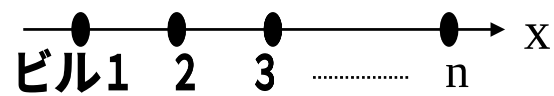
$$9\Delta - 2\Delta = 6\Delta$$



地上に施設を置くときの最適解の求め方

最適解のx座標を求める

まずビルの番号をx座標が小さい順に付け替える



$$W = \sum_{i=1}^{n} N_i$$ とする

N_i を $i=1$ から順に足していき $\frac{W}{2}$ を超えた時の i の値を l とする

$\boxed{\text{最適解のx座標は } x_k \text{ となる}}$ → つまりビル l が建っているx座標

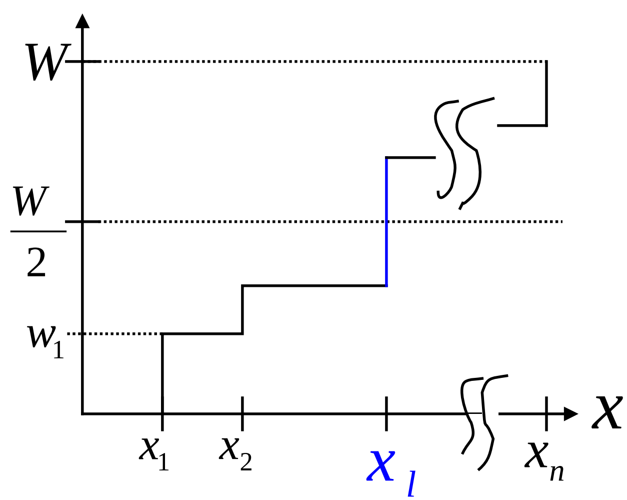


図8：最適解の求め方

地上に施設を置くときの最適解

もし以下に示すように、ある点 x_l で丁度 $\frac{W}{2}$ となった場合

最適解は x_l ～ x_{l+1} 間で不定となる

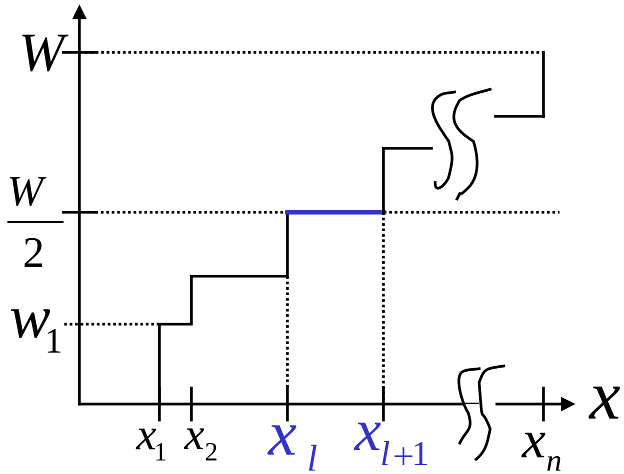


図9：最適解が不定となる場合

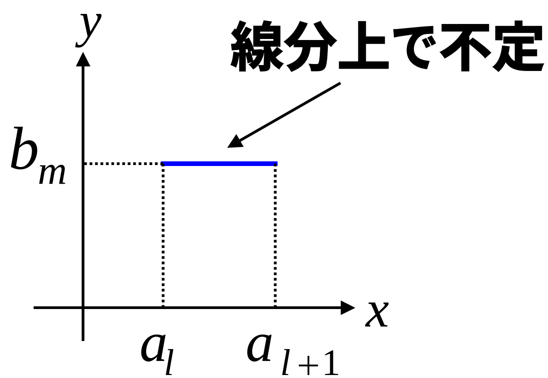
最適解のy座標に関してもまったく同様の方法で求めることができる

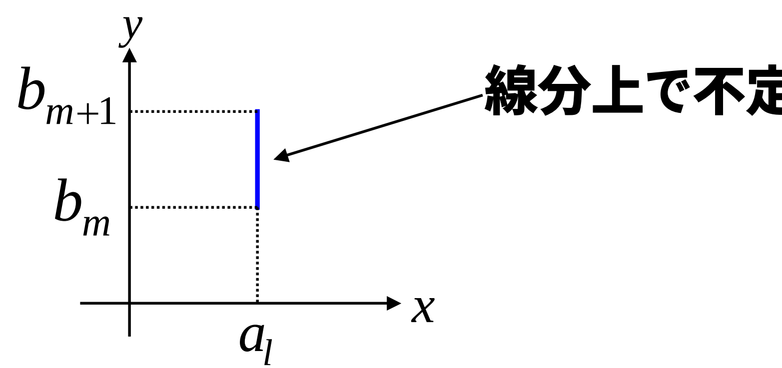
地上に最適位置が現れる時の最適解

i) 点　(a_l, b_m)

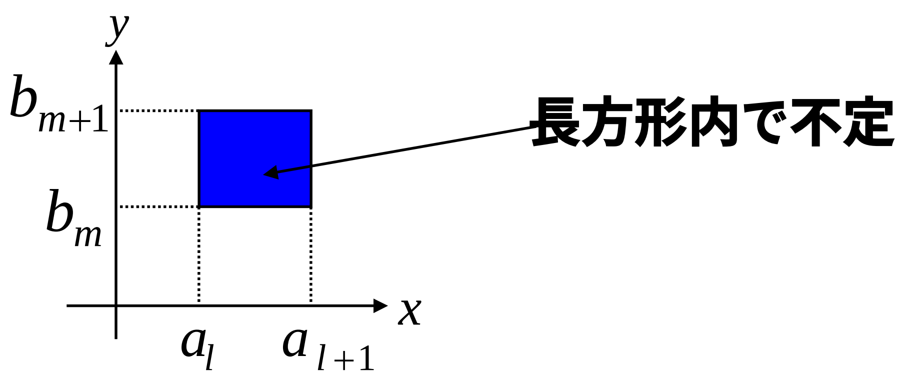
注：$l, m = 1, \cdots, n$　のいずれか

ii) 線分





iii) 長方形



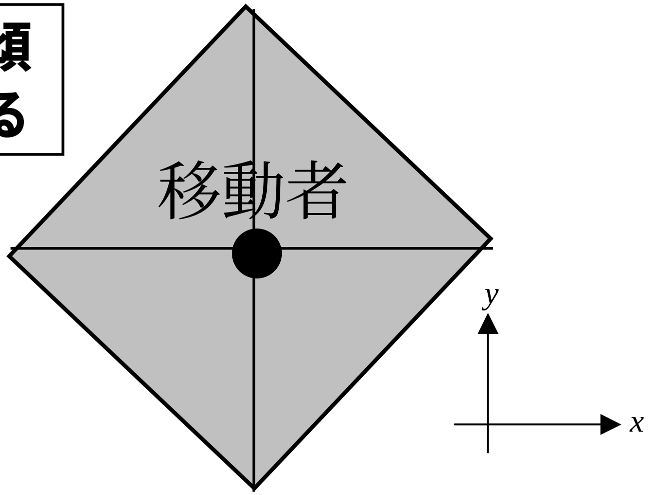
ミニマックス問題

ミニマックス問題の最適解の求め方

格子状道路における，一定時間内に移動できる距離

⬇

道路に対して45度傾いた正方形内になる

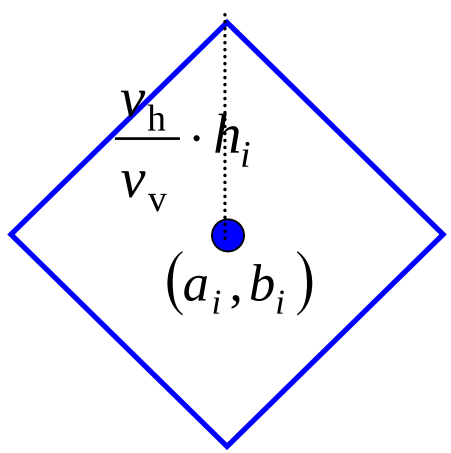


ミニマックス問題の最適解の求め方

最大所要時間かかる候補者
はビルの頂上にいる人である

ビルの頂上にいる人のみを
考えればよい

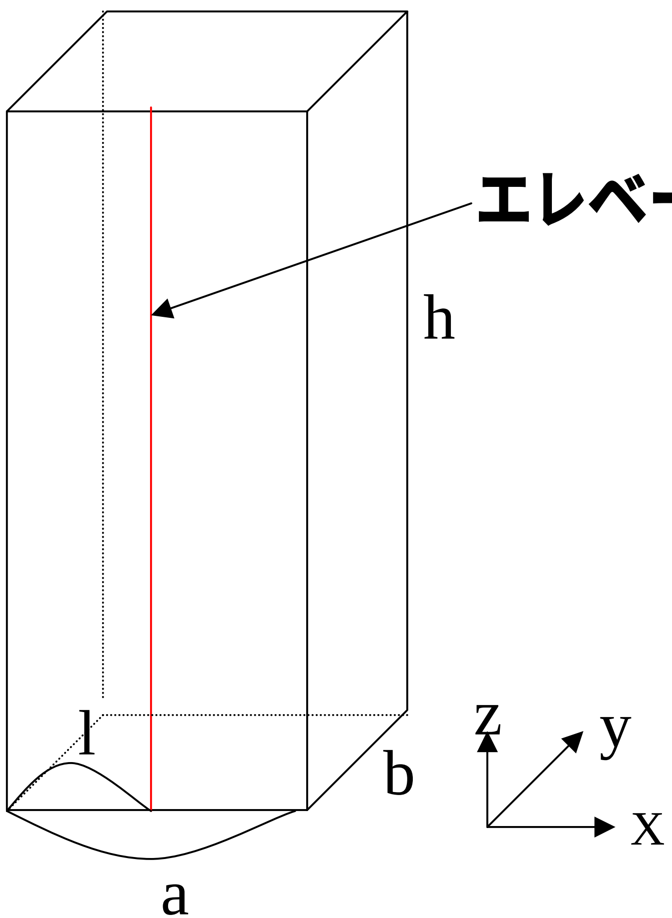
上下方向の移動を平面での移動に換算し，
ビルをダイヤモンドで表す



ビル i

ビルが直方体

1つのビルに着目



体積 $a \times b \times h$ $[\mathrm{m}^3]$

人口密度は一様

ρ :単位体積あたりの人口

$N(=\rho \cdot abh)$:ビル内にいる人口

図8:ビルの概要

ビルが直方体

ビル内の点 ● (x_0, y_0, z_0) にそのビルにいる人が全員移動するときの平均所要時間 $\overline{t}$

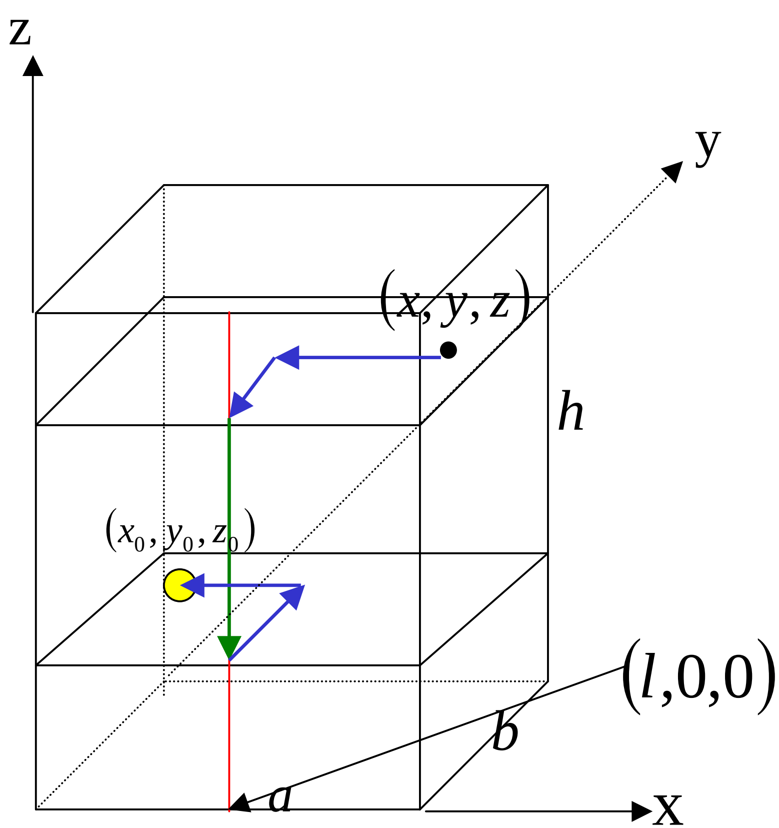


図9：ビル内の点に移動する人の動き

v_h ： 水平方向の移動速度 $[\mathrm{m/s}]$

v_v ： 鉛直方向の移動速度 $[\mathrm{m/s}]$

$\overline{t_h}$ ： 水平方向の平均移動時間 $[\mathrm{s}]$

$\overline{t_v}$ ： 鉛直方向の平均移動時間 $[\mathrm{s}]$

$\overline{t}$ ： 平均移動時間 $[\mathrm{s}]$

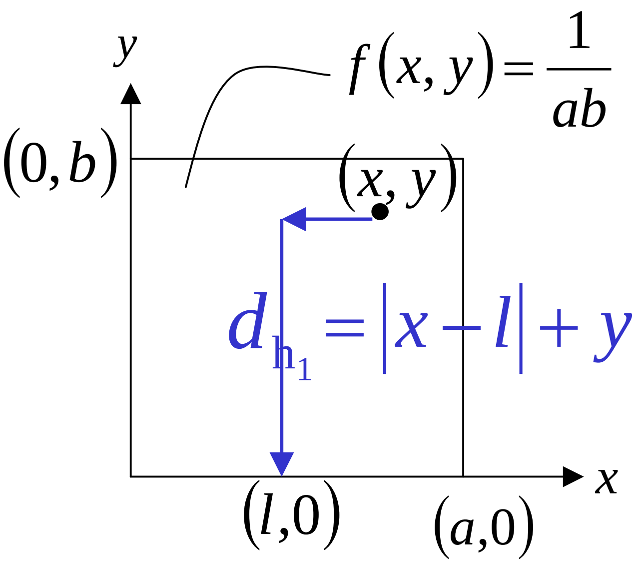
$$\left(\overline{t} = \overline{t_h} + \overline{t_v}\right) \quad \cdots (4.1)$$

ビルが直方体

ビル内の点 (x_0, y_0, z_0) にそのビルにいる人が全員移動するときの平均所要時間 $\bar{t}$

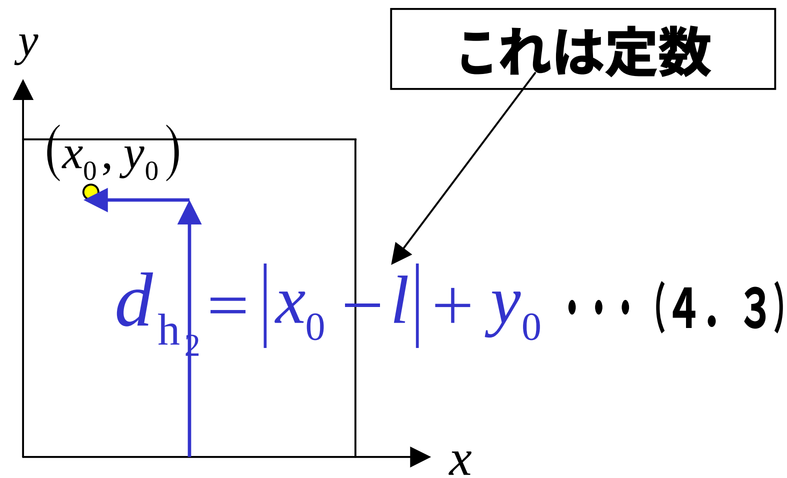
水平移動のみに着目

$f(x,y)$ ：(x,y) における人口の密度関数



$$d_{h_1} = |x - l| + y \quad \cdots (4.2)$$

図１０：出発階 Z における移動



$$d_{h_2} = |x_0 - l| + y_0 \quad \cdots (4.3)$$

図１１：目的階 Z_0 における移動

ビルが直方体

ビル内の点 ● (x_0, y_0, z_0) にそのビルにいる人が全員移動するときの平均所要時間 $\bar{t}$

鉛直移動のみに着目

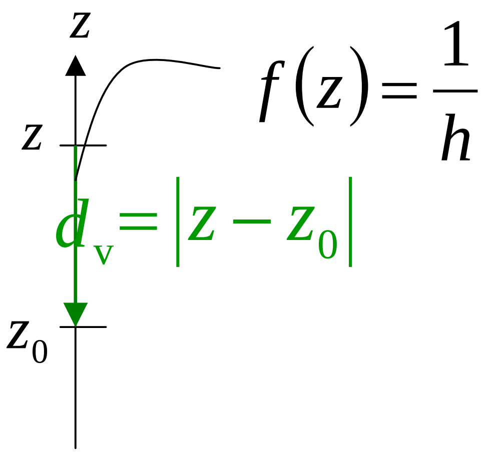


図12：鉛直方向の移動
（ $\bar{d}_{\mathrm{v}}$ を計算するための図）

$$\bar{t} = \frac{\bar{d}_{\mathrm{h}_1} + \bar{d}_{\mathrm{h}_2}}{v_{\mathrm{h}}} + \frac{\bar{d}_{\mathrm{v}}}{v_{\mathrm{v}}} \quad \cdots (4.4)$$

$\bar{t}$ を求めるには $\bar{d}_{\mathrm{h}_1}$ と $\bar{d}_{\mathrm{v}}$ をそれぞれ求めればよい

ビルが直方体

$\overline{d_{h_1}}$ と $\overline{d_v}$ それぞれ求める

$$\overline{d_{h_1}} = \int_{y=0}^{b} \int_{x=0}^{a} d_{h_1} \cdot f(x, y) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{ab} \int_{y=0}^{b} \int_{x=0}^{a} \left(|x - l| + y \right) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \quad \cdots (4.5)$$

$$\overline{d_v} = \frac{N_k}{v_v} \cdot \int_{z=0}^{h} d_v(z) \cdot f(z) \cdot \mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{h} \int_{z=0}^{h} |z - z_0| \cdot \mathrm{d}z \quad \cdots (4.6)$$

ビルが直方体

ビル内の点 ● (x_0, y_0, z_0) にそのビルにいる人が全員移動するときの平均所要時間 $\bar{t}$

(3.5)式より $\overline{d_{h_1}} = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{l^2}{a} - l$ ・・・(4.7)

(3.6)式より $\overline{d_v} = \dfrac{z_0^2}{h} - z_0 + \dfrac{h}{2}$ ・・・(4.8)

以上の結果より $\bar{t} = \overline{t_h} + \overline{t_v}$

$$\overline{t_h} = \left(\frac{a+b}{2} - \frac{l^2}{a} - l + \left| x_0 - l \right| + y_0 \right) \times \frac{1}{v_h} \quad \cdots (4.9)$$

$$\overline{t_v} = \left(\frac{z_0^2}{h} - z_0 + \frac{h}{2} \right) \times \frac{1}{v_v} \quad \cdots (4.10)$$