2 目的巡回購買人問題に対する発見的解法の研究

高木　郁子　（沼田　一道　准教授）

1　はじめに

地理的に分散した多数のマーケットから，必要とする複数種類の商品を，必要な量ずつ購入しなければならないとき，全体としてできるだけ安く，また移動ができるだけ少なくて済むような購買計画を求める問題を巡回購買人問題（Traveling Purchaser Problem：以下 TPP）という．現実問題では，外食産業の材料の購買計画が考えられる．現在外食産業は，昨今発生した世界的大不況の影響を大きく受けており，企業が生き残るためには様々な方向からの効率化が求められている．TPP として購買計画を見直すことで，必要な量を安く，かつ早く仕入れ，材料費や卸売業者への手数料などを節約することが期待できる．

巡回購買人問題は，巡回セールスマン問題 (Traveling Salesman Problem：以下 TSP) を一般化した問題のひとつである．TPP は TSP 同様，与えられたデータが大きくなると厳密な最適解を求めるのが困難な問題である．特に，TPP は訪問するマーケット数が少ない場合でも困難になる場合が多く，現実問題に適用させるためには，厳密解に近い解をできるだけ早く求める発見的解法が必要となる．また，既存研究 [1,2] では，互いに次元の異なる”価格”と”早さ”を同じ重みで合計した値の最小化を行っているため，現実問題に対応させたとき，必ずしも妥当でない可能性がある．そのため，解法のアプローチには，改善の余地がある．本研究では TPP を”価格”と”早さ”の 2 目的問題として扱う発見的解法を提案し，実装と得られる解の評価を行う．

2　TPP の数理モデル

ある領域内に複数個のマーケットが点在している．購買人が購入しなければいけない製品は複数種類あり，各製品は，各マーケットにおいて，その在庫量分までは入手でき，その単価はマーケットによって異なる．購買人は，出発点からマーケットを巡回し，全製品の必要量分を購入する．但し，必要量が満たされれば，全てのマーケットを巡る必要はない．ここで，各製品の各マーケットにおける単価を購買コスト，マーケット間の移動にかかるコストを移動コストと呼ぶ．TPP には，各製品の購入要求量の有無を 0/1 で扱う問題や，マーケット間の移動コストに非対称性を仮定した問題等様々なバリエーションが存在するが，本研究では，各製品の購入要求量を整数値で与え，マーケット間の移動コストは対称であるとした問題を扱う．

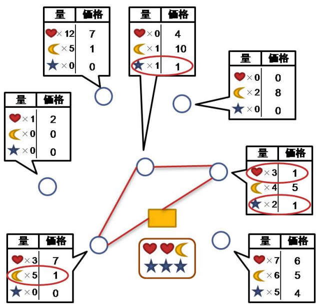

図 1：TPP の例 (m=7,n=3)

3　定式化

2 目的問題である TPP の一方の目的関数を「ある与えられた制限値以下とする」という制約条件に置き換えて扱う．この制限値をパラメトリックに変化させることにより，TPP の「効率化フロンティア（非劣解の集合)」を求めることができる．非劣解とは，一方の目的関数の値を改善するために，他方の目的関数値を改悪せざるを得ないような解のことである．

問題を構成する諸要素を以下のような記号で表わす．マーケットの集合を $M = \{v_1, \ldots, v_m\}$，製品の集合を $K = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ とする．第 i マーケットにおける第 k 製品の在庫量を q_{ik}，購買コストを b_{ik}，第 k 製品の購入要求量を d_k で表わす．在庫量は，当該購買人の購入以外の要因では変化しないものとする．移動については，第 i マーケットと第 j マーケット間の移動コストを $c_{ij}(= c_{ji})$ とし，本拠地 v_0 から出発するものとする．TPP を総購買コスト p_0 以下で購入要求量を満たし，移動コストを最小化する問題として捉えると，以下のように定式化できる．第 i, j マーケット間を通る (1) か否 (0) かを表す決定

変数を x_{ij}, 第 i マーケットを訪れる (1) か否 (0) かを表す決定変数を y_i, 第 i マーケットにおける第 k 製品の購入量を表す決定変数を z_{ik} とする．以上の記号を用いて問題を定式化すると，以下のようになる．

$$
\text{(TPP)}\left|\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{v_i,v_j\in M\cup\{v_0\},i\neq j} c_{ij}x_{ij} & (1)\\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{v_i\in M}\sum_{u_k\in K} b_{ik}z_{ik}\le p_0 & (2)\\
 & \displaystyle\sum_{v_i,v_j\in M} x_{ij}=2y_i & (3)\\
 & \displaystyle\sum_{v_i\in M} z_{ik}=d_k \qquad \forall k\in\{1,\ldots,n\} & (4)\\
 & z_{ik}\le q_{ik}y_i \qquad \forall i\in\{1,\ldots,m\} \quad \forall k\in\{1,...,n\} & (5)
\end{array}\right.
$$

(1) 式は，この問題の目的である”総移動コストの最小化”を表わしている．一方，(2) 式では，制限値 p_0 を設けることで，総購買コストを制約条件の一つとして扱っている．(3) 式は，第 i マーケットを訪問するときは枝が 2 本通り，しないときは枝が通らない制約を表わしている．(4) 式は，第 k 製品の購入量の合計が購入要求量と一致する制約を表わしている．(5) 式は，第 i マーケットを訪問するとき，在庫量以下であれば第 k 製品を購入できること，第 i マーケットを訪問しないとき，第 k 製品を購入できないことを表わしている．

4　提案解法

4.1　方針

総購買コストの制限値 p_0 は次式で与える．

$$p_0 = p_{min} + t \times \frac{p_{max} - p_{min}}{N} \qquad (t = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{6}$$

下限値 p_{min} は移動コストを考慮しない総購買コスト最小の購買計画をソルバー GLPK（GNU Linear Programming Kit version 4.9）で解いた最適値で与える．上限値 p_{max} は購買コストを考慮しない総移動コスト最小の購買計画を近似解法を用いて解き，そこから得られた総購買コストで与える．また，t は制限値のレベルを，N は分割数を表す．TPP が TSP と最も異なる点は，”購入要求量を満たせば，全マーケットを巡回する必要はない”ことである．訪問するマーケットの数が少ないほど，総移動コストが小さくなることが期待されるので，本研究の提案解法では，”訪問するマーケットを如何に少なくして購買を行えるか”に焦点を当て，総移動コストの最小化を試みる．

まず，マーケットの順列 $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m) \in S_m(S_m$：マーケット順列全体の集合) と利用マーケット限度数 s に，購買計画 $z_{ik} = z_{ik}(\pi)$ と，それに伴う総購買コスト $p(\pi, s)$，総移動コスト $\ell(\pi, s)$ を次のように対応させる．

- マーケット $\pi_1, \ldots, \pi_s$ を訪問可能とする．
- 製品 $k(= 1, \ldots, n)$ について，訪問可能マーケット内で総購買コストが最も安く済むような購買計画を立てる．この購買計画を $Z(\pi, s)$，総購買コストを $p(\pi, s)$ とする．
- 上記で実際に購入を行ったマーケットの集合を $M(\pi, s)$ とする．
- $M(\pi, s)$ と本拠地を巡る最短巡回路を 3-opt 法で求めて，その総移動コストを $\ell(\pi, s)$ とする．

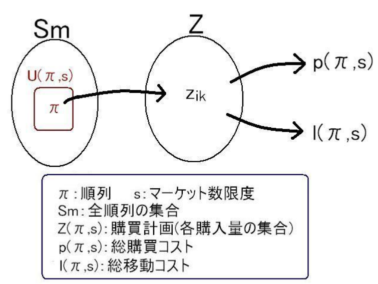

図 2：対応関係図

次に，初期利用マーケット限度数 s_0 と初期順列 π_0 を与える．移動コストを考慮せず，制限値 p_0 以下で訪問するマーケットの個数を最小化する線形計画問題 (連続緩和問題) を GLPK を用いて解き，最適値を整数に切り上げた数値を s_0 とする．また，最適解 $y(0 \le y_i \le 1)$ の値の大きいものから順にマーケット番号を並べた順列を π_0 とする． 訪問可能なマーケットの集合 $M(\pi, s)$ に属するマーケットと属さないマーケットを交換してできる順列全体の集合を π の近傍 $U(\pi, s)$ とする．

$$U(\pi, s) = \{\pi' = (\pi_1, \ldots, \pi_j, \ldots, \pi_s, \pi_{s+1}, \ldots, \pi_i, \ldots, \pi_m) \mid v_{\pi_i} \in M(\pi, s), v_{\pi_j} \notin M(\pi, s)\} \tag{7}$$

そして，現在最適値を ℓ^{opt} とするとき，$\min_{\{\pi' \in U(\pi,s), p(\pi') \le p_0\}} \ell(\pi', s) = \ell(\pi^*, s) \le \ell^{opt}$ ならば，ℓ^{opt} と π^* を更新する．その後，訪問できるマーケットの数 s を 1 つ増やし，ℓ^{opt} の順列 π_{opt} を初期順列 π として局所探索を繰り返す．解が更新されない，または s が m を超えたとき，探索を終了する．

4.2 解法の流れ

提案解法の流れを以下に記す.

Step0 制限値 p_0 以下の移動コストを考慮しない，訪問可能マーケット数を最小化する線形計画問題（連続緩和問題）を解く．その最適値を整数に切り上げた値を s_0，決定変数 $y(0 \le y_i \le 1)$ の大きさ順に並べた順列を初期順列 π_0 とする．また，$\ell_{opt} = \infty$ とする．

Step1 $\pi_i(i \mid v_{\pi_i} \in M(\pi, s))$ と $\pi_j(j \mid v_{\pi_j} \notin M(\pi, s))$ を交換してできる順列全体の集合を π の近傍 $U(\pi)$((8) 式) とする．$\pi_1, \ldots, \pi_s$ を訪問可能として，以下の探索を行う．

- Step1-1 訪問可能なマーケット内で，総購買コストが最も安くなるような購買計画 $z'(\pi, s)$ を立て，得られた総購買コストを $p'(\pi', s)$ とする．
- Step1-2 $z'_((\pi, s)$ が (2),(4) 式を満たすならば，$M(\pi, s)$ と本拠地を巡る最短経路長を，3-opt 法を用いて求め，$\ell'(\pi, s)$ とする．
- Step1-3 $\ell(\pi, s)' < \ell(\pi^*, s)$ ならば、近傍内の解を更新し，$\pi^* = \pi'$ とする．

Step2 Step1 で (4) 式を満たす解が存在しなかったとき，最小総購買コスト $p(\pi_b, s)$ をとる順列 π_b について，$M(\pi_b, s)$ と本拠地を巡る最短経路長を，3-opt 法を用いてを求め，総移動コスト ℓ^* とする．

Step3 $\ell(\pi^*, s) < \ell_{opt}$ ならば，解を更新し，$\pi_{opt} = \pi^*$ とする．$s = s + 1$,$\pi = \pi_{opt}$ とし，Step1 に戻る．$\ell(\pi^*, s) \ge \ell_{opt}$，或いは $m^* = m + 1$ のとき, 探索を終了する．

5 数値実験

5.1 数値実験の概要

本研究ではホームページ'TPP's Site'[3] に掲載されている以下のデータを基に，数値実験を行った．

- $m = 49$，$n = 50, 100, 150, 200$
- 購入要求量 d_k，各製品の購買コスト（$0 \le b_{ik} \le 10$），在庫量（$0 \le q_{ik} \le 15$）
- マーケットにおける 5 種類の座標パターン [1000×1000]

移動コスト c_{ij} は各座標間のユークリッド距離から算出する．また，購入要求量は, 次の (8) 式の λ によって与える．λ の値が大きいほど，各製品の購入要求量が少なくなる．

$$d_k = \lambda \max_{v_i \in M} q_{ik} + (1 - \lambda) \sum_{v_i in M} q_{ik} \tag{8}$$

総購買コストの制限値を，(6) 式で，$N = 20$ とし，$t = 0, 1, \ldots, N - 1$ としてパラメトリックに変化させ, 各総移動コストの変動を見た．プログラムの実装には，Borland 社の Delphi6 を用いた．また，'TPP's Site'[3] 上の 1 目的 TPP(総移動コストと総購買コストの和を最小化する従来の TPP) の最適値を比較の指標として用いる．但し，18000 秒以上かけても最適値が求められない問題例については，上界値（暫定値）を示している．提案解法の値は，非劣解の中で総移動コストと総購買コストの和が最小のものを採用した．

5.2 結果と考察

図 3 は，$m = 49, n = 50, \lambda = 0.5$ の問題例に対する効率的フロンティアである（横軸：総購買コスト p，縦軸：総移動コスト ℓ）．全 20 個の解のうち，4〜12 個が非劣解となる傾向があり，グラフは，p が大きいほど ℓ が小さくなる階段状のものと推定される．また，p 軸の中心から右側には非劣解がない．これは，解の探索を行うときに，購買方法を「製品価格の安い順」と設定しているために，総購買コストの制限値を増やしてもそれを十分に生かした解が求められないためと考えられる．このことは，非劣解の精度を悪くしていると考えられる．「製品価格の安い順」という購買方法は，TPP としてポジティブな手法であるが，移動コストをより考慮するように改善する必要があると考えられる．更に，効率的フロンティアが凹になっている部分がある．これは，階段状のフロンティアを想定すれば起こりうることであるが，解法の精度不足による可能性もある．

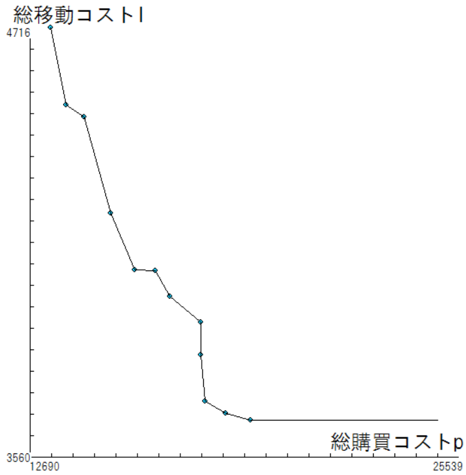

図 3：効率的フロンティア ($\lambda = 0.5$)

また，1 目的 TPP の最適値と提案解法の数値を比較する．但し，提案解法と 1 目的 TPP は，目的関数が異なるため，精度の差は直接的な意味を持つものではない．また，gap は最適値と提案解法の値の相対誤差を n, λ ごとに平均した値を表わす．λ が大きくなると gap が増え，特に $\lambda = 0.9, 0.95$ の場合，1 目的の最適値との gap が広がる傾向がある．これは，提案解法は 2 目的 TPP を求める解法で，$\lambda = 0.9, 0.95$ の 1 目的 TPP の最適値は得られにくい傾向があるためと考えられる．また，λ が大きくなるほど，訪問するマーケットの最小数 s_0 が少なくなり，探索する $M(\pi, s)$ の組み合わせは多くなるため，最適解を見落としがちになる．よって，提案解法をアプローチの仕方から見直す必要があると考えられる．

表 1：最適解との比較 (1 目的 TPP)

問題例		gap(%)
n	50	4.36
	100	4.44
	150	3.05
	200	3.01
λ	0.1	0.07
	0.5	0.03
	0.7	1.15
	0.8	3.26
	0.9	7.26
	0.95	8.03
	0.99	5.94
全体		4.50

6 まとめと今後の課題

本研究では，総移動コストと総購買コストを 2 目的として捉えた巡回購買人問題を挙げ，総購買コストに設けた制限値をパラメトリックに変化させることで，効率的フロンティアを求める試みを行った．このアプローチに対して，交換近傍探索を用いた発見的解法を提案し，数値実験により，得られた解の評価を行った．その結果，全 20 個の解のうち，4〜12 個が非劣解となり，その解は総購買コストの中心から左に偏る傾向が見られた．また，1 目的 TPP の最適解と比較を行うと，その精度は λ によって差が生じた．アプローチの仕方を含めて提案解法を見直し，解の精度を向上させることは今後の課題である．

参考文献

[1] M.C. Goldbarg, L.B. Bagi, E.F.G. Goldbarg: Transgenetic algorithm for the Traveling Purchaser Problem, *European Journal of Operational Research vol 199 36-45(2009)*
[2] J. Riera-Ledesma: The Traveling Purchaser Problem .PhD. Dissertation
[3] TPP's Site (http://webpages.ull.es/users/jriera/TPP.htm) 最終閲覧日：2009/12/18