minmax 型 m 人巡回セールスマン問題の解法に関する研究

原 恒介 (沼田 一道 教授, 松浦 隆文 助教)

1　はじめに

巡回セールスマン問題（Traveling Salesman Problem: TSP）は，ある点（デポ）を出発した 1 人のセールスマンが，与えられたすべての点を一度ずつ訪問し再びデポに戻る巡回路の中で，最短巡回路を求める問題であり，代表的な組合せ最適化問題の 1 つである．TSP は 1 人のセールスマンが全点を訪問するため，点数が多くなると巡回時間が非常に大きくなる．現実的な状況を考えたとき，与えられた点集合を分割し，何人かで手分けして訪問するのが自然である．m 人で分担訪問する問題を「m 人巡回セールスマン問題（multiple Traveling Salesmen Problem：mTSP)」と呼ぶ（図 1）．

mTSP に似た問題に配送計画問題（Vehicle Routing Problem: VRP）がある．VRP はデポから出発した車両が指定された顧客に品物を運んで回る問題であるが，品物には重さ（大きさ）があるので，本来的に複数（回）に分け，車両の容量以下に分割して巡回する．VRP において，容量が大きくその制約を考えなくてよいとした場合は，mTSP と等価である．例えば，スクールバスのルート設計やポストからの郵便物集配 [1] などは mTSP として扱うことができる．mTSP では，分担して訪問するという由来からして各人の移動距離（巡回経路長）があまりバラつかないことが望まれる．そこで本研究では，各セールスマンの移動距離の均等化を目指す minmax 型の mTSP を扱う．TSP 同様，mTSP も現実的な時間内に厳密解を求めることは難しいと信じられている．従って，比較的短時間で，できるだけ精度の高い近似解を求める解法が重要となる．しかし，minmax 型の mTSP に対する解法の研究は少ない．それは，VRP より単純なモデルではあるが，その「minmax 性」が扱い難いためだと思われる．それ故，局所探索をはじめとする発見的解法，それをメタ戦略で強化した解法が主流となっている．先行研究はあまり多くないが，Vallivaara ら [2] は，「チームアントコロニー法 (TACO)」を提案している．これはアントコロニー法を mTSP に当てはまるように拡張した方法である．しかし TACO はメタ戦略の構成に重点を置き，使用している局所探索の精度はあまり高くない．そこで本研究では局所探索の精度を高める方向で，新しい解法を提案する．

本研究では提案解法を実装し，少ない点数の問題例では汎用ソルバーで求めた厳密解と，より大きな問題ではベンチマーク問題に解する既存解法の結果と比較してその性能を評価する．

2　問題の定義：minmax-mTSP

1 つのデポと複数の訪問点が与えられる．m 人のセールスマンがデポから出発し，分担してすべての訪問点を訪れた後デポに戻る．各訪問点はいずれかのセールスマンが一度訪問すればよい．各セールスマンの訪問点はデポ（重複して）を含み，デポ以外については互いに素となる部分集合である．セールスマンは担当する訪問点とデポを最短巡回するものとする．このとき，最長移動距離を移動するセールスマンの移動距離を最小化するような m 個の部分集合とその最長移動距離を求めたい．これを minmax-mTSP と呼ぶ.

2.1　記号の定義

与えられた点集合を $\{1, 2, ..., n\}$ とし，一般性を失うことなく 1 をデポとする．訪問点集合を $V = \{2, 3, ..., n\}$，セールスマンの集合を $K = \{1, 2, ..., m\}$，点（デポ含む）i,j 間の距離を d_{ij} で表す．0-1 決定変数 x_{ijk} でセールスマン k が点 i から j に直接移動する (1) か否か (0) かを，0-1 決定変数 y_{ik} でセールスマン k が点 i を訪問する (1) か否か (0) かを表す．また整数決定変数 f_{ijk} で点 i から j へセールスマン k が直接移動する際に彼が保持する仮想の荷物量を表し，部分巡回路除去制約で用いる．

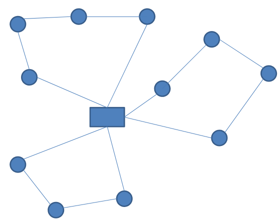

図 1: mTSP の例

2.2 定式化

$$\min \quad \max\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ijk} \quad \forall k \in K\right) \tag{1}$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=2}^{n} x_{1jk} = m \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{h=2}^{n} x_{h1k} = m \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = y_{ik} \qquad \forall k \in K, \forall i \in V \tag{4}$$

$$\sum_{h=1}^{n} x_{hik} = y_{ik} \qquad \forall k \in K, \forall i \in V \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{m} y_{ik} = 1 \qquad \forall i \in V \tag{6}$$

$$f_{ijk} \leq (n-1)x_{ijk} \qquad \forall k \in K, (i,j=1...n), (i{\neq}j) \tag{7}$$

$$f_{ijk} \geq 0 \qquad \forall k \in K, (i,j=1...n), (i{\neq}j) \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=2}^{n} f_{i1k} = n-1 \tag{9}$$

$$f_{1jk} = 0 \qquad \forall k \in K, \forall j \in V \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ijk} - \sum_{h=1}^{n} f_{hik} = y_{ik} \qquad \forall k \in K, \forall i \in V \tag{11}$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j \in V, \forall k \in K \tag{12}$$

$$y_{ik} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in V, \forall k \in K \tag{13}$$

(1) 式は最大移動距離を最小化する目的関数である．(2)，(3) 式はデポを出発した m 人のセールスマンがいずれかの都市を訪問し，いずれかの都市から戻ってくることを表す．(4)，(5) 式は各訪問点に対して 1 本の枝が入り 1 本の枝が出ていることを表す．(6) 式は各点は 1 人のセールスマンによって 1 回限り訪問されることを表す．(7)∼(11) 式は部分巡回路除去制約 [3] である．

3 提案解法

本研究では構築法により初期解 $\boldsymbol{x_0}$ を生成し，改善操作を行う．その後，タブーサーチを行うことで局所解から脱し，大域最適解，もしくはそれに準ずるより精度の高い解を発見する．

3.1 初期解の構築

Step 1-1: ランダムに m 点を選択し，選択された点とデポとを往復する巡回路を作成する．

Step 1-2: 未訪問点を生成された m 個の巡回路の枝間に挿入するために，1 点を選択し，枝間に挿入した後に 2-opt 法を実行する．全ての点と枝の組み合わせに対して挿入後の巡回路長を調べ，挿入後の巡回路長が最も短くなる点を枝間に挿入する．

Step 1-3: 全点がいずれかの巡回路に組み込まれるまで Step 1-2 を繰り返し初期解 $\boldsymbol{x_0}$ を構築する．

3.2 局所探索

巡回路長を短くするために，2-opt 法，クロス交換法，挿入法を用いる．

2-opt 法: 同一巡回路内で現在の巡回路から任意の 2 本の枝を取り除き，新たに 2 本の枝を付け加える操作（図 2）

クロス交換法: 2 つの異なる巡回路において，各巡回路から部分経路を選び，それらを交換することで改善を行う操作（図 3）

挿入法: 2 つの異なる巡回路において，どちらかの巡回路に属する点を他方の巡回路の枝間に挿入をする操作 (図 4)

上記の 3 つの局所探索法を併用し、以下の手順で高精度の準最適解を追求する．

Step 2-1: 現在の解にクロス交換法を実行する．解が改善された場合，各巡回路に 2-opt 法を実行する．クロス交換法を交換が行われなくなるまで繰り返す．

Step 2-2: 現在の解に挿入法を実行する．解が改善された場合，各巡回路に 2-opt 法を実行する．クロス交換法を交換が行われなくなるまで繰り返す．局所解に陥るまで，この操作を繰り返す．

Step 2-3: 局所最適解 $\boldsymbol{x_1}$ が得られるまで，Step 2-1 と Step 2-2 を繰り返す．

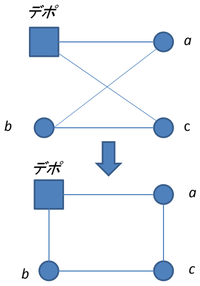

図 2: 2-opt 法

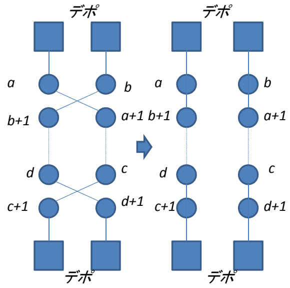

図 3: クロス交換法

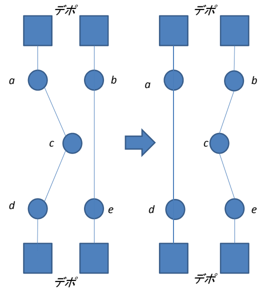

図 4: 挿入法

3.3　タブーサーチ

ある解 $\boldsymbol{x}$ に対して小さな修正を加えて得られる解の集合 $N(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ の近傍とする．局所探索法は，適当な初期解 $\boldsymbol{x_0}$ から始め，現在の解 $\boldsymbol{x}$ よりも良い解 $\boldsymbol{x'}$ が $N(\boldsymbol{x})$ 内に存在すれば $\boldsymbol{x} := \boldsymbol{x'}$ に置き換える操作を，局所解が得られるまで行う．一方，タブーサーチは，近傍 $\boldsymbol{x}$ の中に，現在の解 $\boldsymbol{x}$ よりも良い解が存在しなくても，近傍解の中で最も良い解へ移動するという戦略を基本とする．$\boldsymbol{x'}$ が改悪解であっても解の移動が強制的に行われるため，局所最適解で探索が終了することなく解の移動が継続される．しかし，$\boldsymbol{x}$ が局所最適解である場合，$\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{x'}$ に移動したのち再び $\boldsymbol{x}$ に戻るサイクリングが発生してしまう．それを防ぐためにタブーリストを用い一定期間タブーリストに含まれる解集合への移動を禁止する [4]．

提案解法では，Step 2-3 終了後，クロス交換法においてタブーサーチを実行する．提案解法では，クロス交換法におい交換する経路の始点となる a, b(図 3) をタブーリストに記憶し，タブーリストに点 a, b が記憶されている間，a, b を始点とするクロス交換の実行を禁止する．ただし，タブーリストに含まれる a, b を始点としてクロス交換を実行することで，現在得られている最良解よりも優れている解が得られる場合，改善操作は実行しないが，最良解は更新する．タブーサーチを用いて解の更新を s 回実行し，探索過程で得られた最良解を出力する．

4　数値実験と考察

本研究では汎用 MIP ソルバ Gurobi で得られた厳密解，Vallivaara により提案されている TACO[2] の結果と提案解法で得られた解を比較し精度を検証する．点データは TSPLIB[5] より引用し，インデックス番号 1 の点をデポとした．タブー期間，反復回数は問題により異なる．10 通りの初期解に対して提案解法を実行し，10 通りの中で得られた最良解を提案解法の解として出力する．

汎用ソルバ Groubi では，点数 20 の問題例までしか現実的な時間内では解を得ることができなかった．また，ソルバで解を得ることができた点数 20 点の問題でも $m = 3$ では 15000 秒近い計算時間を要したが，提案解法は 5 秒程度で厳密解を得ることができた (表 1)．

既存解法である TACO(表 2) と提案解法の性能比較の結果を表 2 に示す．表 2 より，TACO より優れた解が多くの問題例で得られた．eil51 では m の値に関わらず TACO と同等の結果が得られた．これは両手法共に最適解が得られてると考えられる．76 点以上の問題例に対しては，$m = 3, m = 4$ の場合 TACO と同等，もしくはそれ以上の結果がえらえた．しかし $m = 2$ の場合には点数 101 以上では TACO に劣り，点数が増加するにつれて TACO との差も広がっていっていることがわかる．提案解法

表 1: 厳密解との比較

問題例			提案解法		Groubi
	n	m	最良解	平均	厳密解
eil15	15	2	119	119.0	119
		3	94	94.0	94
		4	87	88.1	87
eil20	20	2	137	137.0	137
		3	110	110.0	110
		4	94	94.0	94

はクロス交換近傍のみでタブーサーチを行っているため，$m = 2$ においては巡回路の組合せが 1 組しか存在せず，交換できる部分経路の数が $m = 3$，$m = 4$ と比べて少ない．探索範囲が狭いので．反復回数を増加しても精度はさほど上がらないのではないかと考えられる．

表 2: TACO との比較

			提案解法		TACO		
problem	n	m	最良解	平均	最良解	平均	%
eil51	51	2	224	224.2	224	224.7	0
		3	159	159.3	159	163.0	0
		4	130	131.6	130	131.6	0
eil76	76	2	277	277.9	278	281.0	0.4
		3	193	193.3	194	199.1	0.5
		4	159	159.9	161	163.6	1.3
eil101	101	2	330	331.7	327	330.3	-0.9
		3	225	227.0	226	227.8	0.4
		4	177	179.4	178	181.0	0.6
kroA200	200	2	15552	15787.3	15376	15499.3	-1.1
		3	10726	11013.5	10997	11186.5	2.5
		4	8711	8866.0	8917	9134.4	0.1
fl417	417	2	6907	7199.7	6804	6962.8	-1.5
		3	5178	5376.3	5296	5470.0	2.1
		4	4272	4796.0	4844	5073.8	2.5

5　まとめと今後の課題

本研究では最長移動セールスマンの移動距離を最小化する mTSP に対し，局所探索とタブーサーチを用いたより精度の高い解を期待できる発見的解法を提案した．提案解法はその結果，点数の少ない問題では厳密解，もしくはそれに近い値を得ている．既存の解法と比較した結果，多くの場合に優れた結果を得ることができた．しかし，問題が大規模になると計算時間が大幅に増加する，クロス交換法のみでのタブーサーチでは限界が存在することも確認された．今後の課題としてクロス交換法以外の交換操作も併用しタブーサーチを行い検証する必要があると考えられる．

参考文献

[1] T. Bektas (2006), The multiple traveling salesman problem:an overview of formulations and solution procedure. *Omega*, **34**, pp.209–219.

[2] I. Vallivaara (2008), A Team Ant Colony Optimization Algorithm for the Multiple Traveling Salesman Problem with Minmax Objective, *MIC '08 Proc. of the 27th IASTED Int. Conf. on Modelling, Identification and Control*, pp.387–392.

[3] 沼田　一道 (2011), 汎用 MIP ソルバによる巡回セールスマン問題の求解-多項式オーダ本数の部分巡回路除去制約, オペレーションズ・リサーチ：経営の科学, **56(8)**, pp.452–455.

[4] 野々部　宏司, 柳浦　睦憲 (2008), 局所探索法とその拡張-タブーサーチ法を中心として, 計測と制御, **47(6)**, 493–499.

[5] TSPLIB,http://comopt.ifi.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95/(最終閲覧日 2013/12/25)

[6] P. Junjie and W. Dingwei (2006), An Ant Colony Optimization Algoritthm for Multiple Travelling Salesman Problem, *Proc. of the First Int. Conf. on Innovative Computing, Information and Control (ICICIC'06)*, **1**, pp.210–213.

[7] S. Somhom et al. (1999), Competition-based Neural Network for the Multiple Travelling Salesmen Problem with Minmax Objective, *Computers & Operations Research*, **26**, pp.395–407.

[8] S. Yuan et al. (2013), A New Crossover Approach for Solving the Multiple Travelling Salesmen Problem Using Genetic Algorithms, *European Journal of Operational Research*, **228**, pp.72–82.