学習塾 A における時間外仕事処理スケジューリング問題

川村 洋平(沼田 一道教授，松浦 隆文助教)

1. はじめに

少子化の進行に伴い生徒獲得競争が激しさを増している学習塾業界では，利用者（生徒）の満足度を高めるため，様々な付加的サービスを行っている．そのようなサービスの中に，「定期試験問題の模範解答提供」がある．大手の進学塾では，「模範解答作成業務」を専門に（有給で）行う職員もいるが，多くの中小学習塾では，アルバイト講師が正規の（有給の）授業業務の合間に，無給で行っているのが実情である．このとき，誰（のどの日の空き時間）に，どの科目（学校・学年）の処理を割当てるか決めるスケジューリングが必要となる．一般に，各アルバイト講師が担当できる科目やその処理スピードは異なる．模範解答の作成は，ある期日（締切）以前で，出来るだけ早期にすべての科目を終了することが望ましい．また，各講師がこの業務に従事できる日時や時間数はそれぞれ異なる．さらに，この無給業務の割当てが偏ると大きな不満が出るし，本来の業務（授業）に悪影響を与えてしまう．現状では，教室長（正社員）や主任アルバイトが感覚的に処理を割当てているが，スケジュールの作成自体が難しく，負担の大きなものになっている．また，良いスケジュール（締切を守って全員が納得する）を作成するのも難しい．

本研究では，上記のような時間外業務処理スケジューリングを数理計画問題として定式化し，講師の負担を出来るだけ均等にする割当てを求める手順を提案する．アルバイト塾講師のシフトスケジューリングを扱った研究は多数あるが（例えば[1]），時間外臨時業務の割当てを扱った研究は見当たらない．実際に講師数 13 人程度の場合の例題を解いて，提案したアプローチの有用性を評価する．

2. 問題設定

本研究で扱う問題は筆者がアルバイトをしている A 塾における状況をモデル化したものである．A 塾は 13 人のアルバイト講師を雇用し，近隣 5 校の中学生を受入れている．各学校・学年・教科の期末試験の模範解答作成仕事を 1 つ 1 つ区別して，それぞれを仕事と呼ぶ．A 塾のアルバイト講師は，文系と理系に分かれており経験年数も一様ではないので，各仕事の処理時間は講師によって異なる．ある講師がある仕事を処理できないこともあるが，その場合の処理時間は∞と考える．

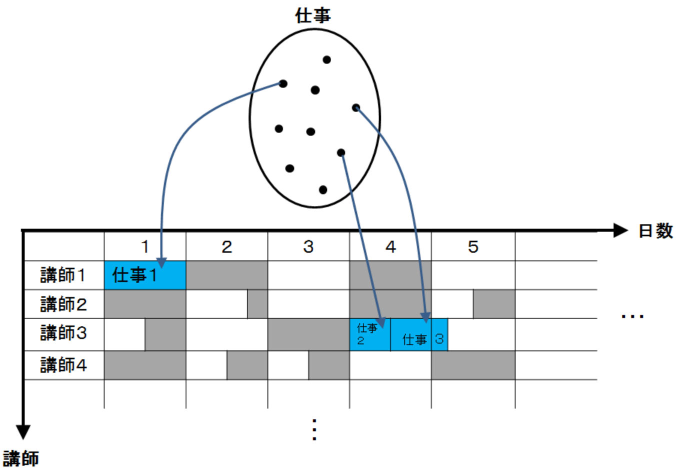

図 1：仕事の割り当て

1 つの仕事は 1 人の講師が処理するものとし，1 日（の空き時間）で処理できない場合には，同一人が日を跨いで処理するものとする．また，可能であれば 1 日に複数の仕事を処理しても良い(図 1)．良いスケジュールは，全仕事の完了日ができるだけ早く，講師の負担ができるだけ公平なものである．早く完了させようとすると，処理速度の大きい，あるいは空き時間の多い講師に多くの仕事を割当ててしまう．一方，公平に割当てようとすると，完了日が遅れてしまう可能性があり，両者はトレード・オフの関係にある．

本研究では，この 2 目的最適化問題を，全仕事の完了限度期日（L）をパラメータとし，L日までに終了するとしたうえで，講師の負担を均等化する 1 目的の割当問題[2]として扱う．ただし，講師の負担については，各講師の「負担感」を「（L日に全仕事が完了するとして）その講師がL日までに実際に仕事に費やした時間をL日までに使用可能な時間で割った値」で定義する．負担感が最大の講師と負担感が最小の講師の負担感の差をできるだけ小さくすることで，講師の負担（感）の公平性（均等化）を目指す．

3. 記号の定義と定式化

前節で定義したL以外に，定式化に用いる記号を定義する．講師数をm，仕事数をn，全仕事を完了させる期限(納期)をKとする．負担感が最大の講師の負担感をz，負担感が最小の講師の負担感をwとする．μ_{ij}は講師iが仕事jを処理するのに要する時間を表す．a_{it}はt日までに講師iが仕事に使用可能な時間を表す．μ_{ij}とa_{it}は現実の仕事から見積もって得た定数である．x_{ij}は講師iへ仕事jを割当てる(1)か否(0)かを表す 0-1 決定変数である．y_tはt日目$(t \le K)$に全業務を終える(1)か否(0)かを表す 0-1 決定変数である．

3.1. 最短日数の求解

最早の終了可能日f^*を求める問題は, 上述の記号を用いて(1)～(4)式のように定式化される. ただし, Mは十分大きな正の数を表す.

$$\text{min.} \quad f = \sum_{t=1}^{K} t \cdot y_t \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} x_{ij} \le a_{it} y_t + M(1 - y_t) \quad (i = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, K) \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, m) \tag{3}$$

$$\sum_{t=1}^{K} y_t = 1 \tag{4}$$

(1)式は全業務完了までにかかる日数を最短化する目的関数である．(2)～(4)式は制約式を表している．(2)式はt日で全業務が完了する時，各講師が業務を行う時間は，講師がその日までに使用可能な時間数以内であることを示している．L日で全業務が完了しない時（$y_t = 0$の場合），Mによって，この制約式は常に成立つ． (3)式は各仕事が必ず講師の誰かに割当てられることを示している．(4)式は全業務を 1～K日のどこかで終了させることを示している．

3.2. 負担の均等化

最短所要日数f^*が求められたら，終了日Lをf^*~Kの間で変化させて，負担が最も均等になる終了日を求める．最適終了日 L^* は，(5)～(9)式で定式化される最適化問題の最適値$g^*(L)$が最小となるLである．この最適化問題はパラメータLを含んでいる．

$$\min.\ g(L) = z - w \tag{5}$$

$$\text{s.t. } z \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} x_{ij}}{a_{iL}} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

$$w \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} x_{ij}}{a_{iL}} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} x_{ij} \leq a_{iL} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{9}$$

(5)式は負担感が最大である講師と負担感が最小の講師の負担の差を最小化する目的関数である．(6)～(9)式は制約式を表している．(6)式はL日に仕事が完了する時，zが負担感最大である講師の負担感以上の値になることを示している．(7)式はL日に仕事が完了する時，wが負担感最小である講師の負担感以下の値になることを示している．(8)式は，L日で全仕事が完了する時，各講師が仕事を行う時間は，講師がL日までに使用可能な時間数以内であることを示している．(9)式は各仕事が必ず講師の誰かに割当てられることを示している．

4. 数値実験

4.1 設定

講師数 13，仕事数 75（5 校 3 学年 5 教科）とし，μ_{ij}とa_{it}のデータを Microsoft Excel を用いて手作業で 2 種類作成した．このデータと 3.1 節で示した最短日数を計算するモデルを用いて汎用ソルバーGurobi5.6.0[3]にて計算した．更に，計算結果から得られた最短日数から納期KまでパラメータLを変化させ, 講師の負担感を均等化する 3.2 節で示したモデルを用いて Gurobi にて計算した．

4.2 結果と考察(最短日数)

求められた最短日数は 14 日と 11 日であった．講師毎の負担感を表 1 として示す．講師 6 と講師 13 はどちらの場合でも負担感が小さくなっていた．担当できる仕事と最短日数までの仕事使用可能時間に関して講師 6 と講師 13 は他の講師よりも少なく，反対にμ_{ij}の値が大きかったため，他の講師へ仕事を多く割当てることで最短で全仕事を終了させていることが原因だと考えられる．この最早終了解における最大負担感と最小負担感の差を表 2(の改善前の欄)に示す．最大負担感と最小負担感の差は, 全仕事完了までに必要な最短日数が 14 日の場合は 0.125, 11 日の場合は 0.25 であった．

表 1：講師毎の負担感

		データ1	データ2
最短終了日数		14	11
講師負担感	講師1	0.9875	0.95
	講師2	1	0.983333
	講師3	1	0.9375
	講師4	1	0.9
	講師5	0.9875	0.9875
	講師6	0.91675	0.85
	講師7	0.958375	1
	講師8	1	1
	講師9	1	0.9
	講師10	1	0.966667
	講師11	1	0.85
	講師12	0.999833	1
	講師13	0.875	0.75

4.3　結果と考察(負担均等化)

負担感の差を改善した計算結果を表 2 に示す．全仕事完了までに必要な最短日数が 14 日の場合と 11 日の場合の両方で最短日数にて全講師の負担感が 1 となった．どちらも最大負担感と最小負担感の差が 0 となり，講師の負担感の差は改善された．最短日数で講師の負担感を均等化することが可能であったため，それ以降パラメータLを変化させて数値実験は行わなかった．どちらも最短日数で負担感を均等化できてしまった理由としては，講師の累積使用可能時間a_{it}をデータとして作成した際に講師毎に大きな差がなかったためであると考えられる．また，同様に作成したデータであるμ_{ij}の値も講師と仕事によって異なっているが値の範囲が小さいので，講師に割当てられる仕事を変えることによって割当てられた仕事を行う時間を調節しやすかったため，全講師の負担感を 1 にすることが可能であったのだと考えられる．

表 2：負担感の差

	最短14日のデータ		最短11日のデータ	
	改善前	改善後	改善前	改善後
最大負担感	1	1	1	1
最小負担感	0.875	1	0.75	1
負担感の差	0.125	0	0.25	0

5.　まとめと今後の課題

本研究では，講師の負担感を均等化した時間外仕事のスケジュール作成を扱い，最短日数で全業務を完了させる問題と，ある日数で全業務が完了するとして最も負担感が大きい講師の負担感と最も負担感が小さい講師の負担感の差を最小化する問題を定式化して，講師の負担感が最も均等化されるスケジュール作成する方法を提案した．学習塾のように働く講師が曜日で固定化されている状態にある場合は，仕事に対して使用可能な時間は講師毎に大きな差が発生しないため，最短日数であっても仕事の割当てを均等化することが可能であった．

本研究の中では仕事使用可能時間に対する実働時間の割合を負担感と定めたが，負担感の均等化を図り求解した場合に割当てられた仕事数は講師毎に大きな差が見られ，その点についても講師間で負担の格差を感じることがあると思われる．また，割当てられた仕事を行う時間に関しても負担を感じる講師が存在する可能性がある．今後の課題としては，講師の負担を別の指標で考えて負担均等化を図ることと，講師の仕事使用可能な時間に大きな差が発生した場合のデータにおいても負担を均等化することである．

参考文献

[1]常陸 徹，M 個別指導塾における講師割り当て作業に関する研究，東京理科大学経営工学科卒業抄録集(2008)

[2]今野浩，鈴木久敏(1982)，整数計画法と組み合わせ最適化，日科技連，pp344

[3]Gurobi，http://www.gurobi.com(2013.12.25)