所属世帯数の均等性を考慮した地域分割に関する研究

松本　拓也　（沼田一道　教授，松浦隆文　助教）

1. はじめに

私たちは一定の地域に生活の本拠を置いて日常生活を営んでおり，地域全体に関わる事柄については地域の住民が協力してこれを処理している．たとえば，回覧板の受け渡し，ゴミ捨て場の管理，集金業務などで，これらは地域自治と呼ばれている．地域自治を行うため，長野市では近隣の世帯が集まり隣組（以下「組」とよぶ）を組織している．

長野市若槻地区上野区には，現在 49 の組が存在し，所属世帯数最大の組は 38 世帯，最小の組は 12 世帯となっている[1]．上野区では，地域自治を円滑にするため，それぞれの組内に役員を置いている．各世帯は，毎年交代で所属する組の役員になる．しかし，所属世帯数が異なると役員になる頻度が異なるので，組により仕事の負担量に違いが生じる．これを改善するため，所属世帯数の均等性（のみ）を考慮して地域分割を行うと，世帯が広範囲に点在する組ができてしまう．組のまとまりが悪いと，各世帯を 1 軒ずつ順に訪問する広報配布業務や，訪問をピストン的に繰返す集金業務などの負担が大きくなる．従って，地域分割の際は，所属世帯数の均等性を考慮した上で，組ごとのまとまりの良し悪しを考慮しなければならない．

2.　扱う問題と研究目的

以下では，まとまりの良し悪しの尺度として「組内で最も離れている 2 世帯（最遠点対）の距離（最遠距離）」と「組内の全ての世帯を 1 度ずつ訪問して出発点に戻る巡回経路の長さ」を考える．最遠距離が最大の組の最遠距離を「最大最遠距離」，また（最短）巡回路長が最大の組の巡回路長を「最大巡回路長」とよぶ．

本研究では，各組の所属世帯数が平均値から許容範囲内の乖離に収まる範囲内で，最大巡回路長，あるいは最大最遠距離を最小にするような地域分割を求める問題を提起し，数理計画問題として定式化する．それぞれの問題に対する解法を提案し，数値実験を通しそれらを評価する．2 つの「まとまりの良し悪し」の尺度による結果の違いについても考察する．

3.　定式化

世帯の集合を$V=\{1,2,..,i,..,j,..,n\}$，組の集合を$G=\{1,2,..,k,..,m\}$で表す．世帯iと世帯jの間の移動距離をd_{ij}とする（$d_{ij}=d_{ji}$）．世帯iが組kに属するか否かを 0-1 決定変数x_{ik}，世帯iと世帯jが同じ組kに属するか否かを 0-1 決定変数y_{ijk}，平均世帯数からの乖離の上限をαで表す．最遠距離を基準とした定式化では，組k内の最遠距離をs_k，最大最遠距離をtとする．巡回路長を基準とした定式化では，参考文献[2]の部分巡回路除去制約をm個の巡回路からなる場合に拡張して用いた．

まとまりの良し悪しの 2 つの尺度について，各組の所属世帯数が平均値から許容範囲内の乖離に収まる分割の中で，各尺度による評価値が最大（悪）の組の評価値を最小（良）化する問題は以下のように定式化できる．

最遠距離を基準とした定式化

$$\text{minimize} \;\; t \qquad (1)$$

$$t \geq s_k \quad \forall k \in G \qquad (2)$$

$$s_k \geq d_{ij} \cdot y_{ijk} \quad \forall i,j \in V, \forall k \in G \qquad (3)$$

$$y_{ijk} \leq x_{ik} \qquad \forall i,j \in V, \forall k \in G \qquad (4)$$

$$y_{ijk} \leq x_{jk} \qquad \forall i,j \in V, \forall k \in G \qquad (5)$$

$$y_{ijk} \geq x_{ik} + x_{jk} - 1 \qquad \forall i,j, \in V, \forall k \in G \qquad (6)$$

$$\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor - \alpha \leq \sum_{i=1}^{n} x_{ik} \leq \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + \alpha \qquad \forall k \in G \qquad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{m} x_{ik} = 1 \qquad \forall i \in V \qquad (8)$$

$$x_{ik} \in \{0,1\} \;,\; y_{ijk} \in \{0,1\} \qquad (9)$$

巡回路長を基準とした定式化

$$\text{minimize} \;\; \max_{1 \leq k \leq m} \left\{ \sum_i \sum_j d_{ij} z_{ijk} \right\} \; (i \neq j) \qquad (10)$$

$$\sum_{k=1}^{m} x_{ik} = 1 \quad \forall \mathrm{i} \in \mathrm{V} \qquad (11)$$

$$\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor - \alpha \leq \sum_{i=1}^{n} x_{ik} \leq \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + \alpha \qquad \forall k \in G \qquad (12)$$

$$\sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^{n} z_{hik} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} z_{ijk} = x_{ik} \quad \forall \mathrm{i} \in \mathrm{V}, \forall \mathrm{k} \in \mathrm{G} \qquad (13)$$

$$u_{ik} \leq x_{ik} \qquad \forall i \in V, \forall k \in G \qquad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_{ik} = 1 \qquad \forall k \in G \qquad (15)$$

$$0 \leq w_{ik} \leq n \cdot u_{ik} \qquad \forall i \in V \qquad (16)$$

$$0 \leq f_{ijk} \leq n \cdot z_{ijk} \qquad \forall i,j \in V \;\; (i \neq j) \qquad (17)$$

$$\sum_{h=1}^{n} f_{hik} + x_{ik} = \sum_{j=1}^{n} f_{ijk} + w_{ik} \quad \forall \mathrm{i} \in \mathrm{V}, \forall \mathrm{k} \in \mathrm{G} \qquad (18)$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ijk} \leq n \cdot (1 - u_{ik}) \quad \forall \mathrm{i} \in \mathrm{V}, \forall \mathrm{k} \in \mathrm{G} \qquad (19)$$

$$x_{ik}\,, u_{ik}\,, z_{ijk} \;\in\; \{0,1\} \qquad (20)$$

$$w_{ik}\,, f_{ijk} \;\in\; \{0,1,2,\cdots\} \qquad (21)$$

式(1)は，最大最遠距離を最小化する．式(2)は最大最遠距離の定義式．式(3)は，各組の最遠距離の定義式．式(4)(5)(6)は,世帯iと世帯jが組kに属するか否かを表す．式(7)(12)は，各組の所属世帯数を平均値から一定の範囲内に収める．式(8)(11)は，各世帯がいずれか 1 つの組に属することを表す．式(10)は，最大巡回路長を最小化する．式(13)(14)(15)(16)(17)(18)(19)は，部分巡回路除去制約である[2].

4. 提案解法

つぎの 2 つの操作を用いて解の改善を図る．

交換操作： 最大最遠距離(最大巡回路長)の組の世帯と他の組の世帯とで，所属する組を交換する．交換前の最大最遠距離(最大巡回路長)と交換後の最大最遠距離(最大巡回路長)を比較し，最も改善が大きい所属の交換を実行する．

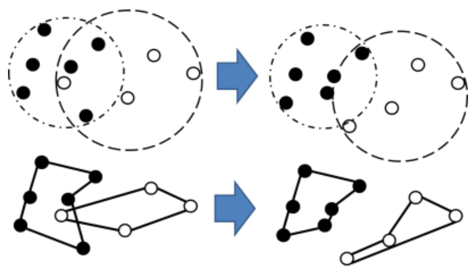

図 1 交換操作

移動操作： 最大最遠距離(最大巡回路長)の組の世帯を他の組へ移す．移動前の最大最遠距離(最大巡回路長)と移動後の最大最遠距離(最大巡回路長)を比較し，移動後の各組の所属世帯数が許容範囲内になる移動で，最も改善が大きい所属の交換を実行する．

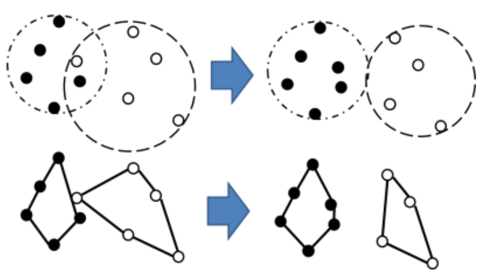

図 2 移動操作

解法手順

評価値（最遠距離と巡回路長）を計算する部分が異なるだけで，2 つの尺度に対する提案解法の流れは同じである．初期解作成部分についてのみ区別して説明する．

最遠距離の初期解生成

Step1： 各世帯を所属世帯数の制約を守りながらm組に分け，各組の最遠点対の中点をその組の基準点とする．各基準点に近い順に（所属世帯数の制約を守りながら）世帯を取込んでいき，組分けを更新して，再び基準点を計算する．これを所属世帯の変化がなくなるまで繰返す．

巡回路長の初期解生成

Step1’：各世帯を所属世帯数の制約に従ってm組に分け，番号順の経路を各組の初期巡回路とする．

共通

Step2： 交換操作と移動操作で最も改善が大きい実行可能解を実行する．

Step3： Step2 を改善がなくなるまで繰り返し行う．

Step4： Step1（1’）から Step3 までを繰り返し行い，最良解を採用する．

5. 数値実験

Borland 社の Delphi6 を用いて，最遠距離を基準とした提案解法を実装し，解を求め，汎用ソルバーGurobi を用いて求めた厳密解と比較した．100×100 の地域にランダムに座標を発生させて実験を行った．最遠距離の場合 60 点以上，巡回路長の場合 20 点以上の問題例を Gurobi で解くと，計算時間が長大で，厳密解は求められなかった．まず，厳密解の求められた範囲の問題例（19 点以下）を提案解法で解いて，その性能を評価した．組数は，所属世帯数が 3 世帯以上になるように設定した．世帯数の平均値からの乖離の許容範囲は 1 に固定した．誤差率は，最遠距離と巡回路長それぞれの厳密解と提案解法の差を厳密解で割り，100 をかけたものである．

表 1 に，組数と世帯数を変化させたときの最遠距離と巡回路長の誤差率を示す．提案解法により，最遠距離基準で 60 世帯を 10 組に分割した結果を図 3 に，巡回路長基準での結果を図 4 に示す．

表 1 より誤差率は 6%未満なので，厳密解を求められない場合，提案解法はそれなりに有効と思われる．提案解法で誤差が大きい場合，組を構成する世帯の集合は厳密解のそれとかなり異なっていた．試行回数を増やすことで精度が上がる可能性はある．また，図 3，図 4 から，最遠距離での分割は組同士の重なりがあるが，巡回路長での分割は組

表 1 最遠距離と巡回路長の厳密解との誤差率

基準	最遠距離			巡回路長		
組数	2	3	4	2	3	4
世帯数	誤差率(%)					
16	0.00	0.00	1.96	0.00	0.00	0.00
17	0.00	0.00	2.04	0.99	0.00	5.13
18	0.00	3.64	0.00	0.00	0.00	0.00
19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.73

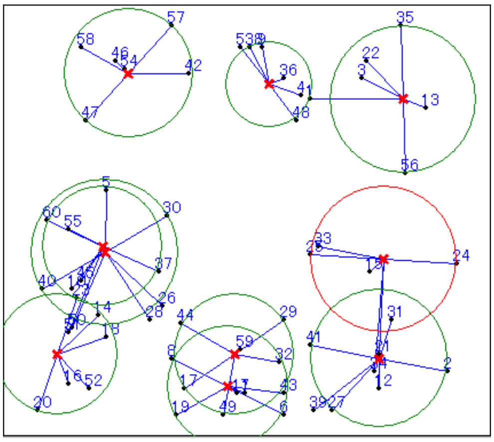

図 3 最遠距離での結果

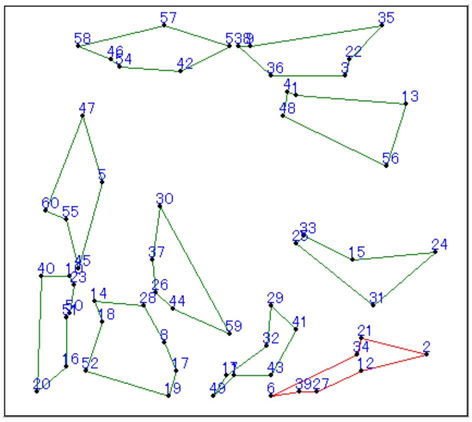

図 4 巡回路長での結果

同士の重なりがない．これらは，最遠距離は組内の 2 世帯のみを考慮するのに対し，巡回路長は組内全ての世帯を考慮するので,最遠距離より厳しい制約となるからだと考えられる.これらのことから，最大最遠距離より最大巡回路長を基準にして地域分割を行った方が，まとまりの良い地域分割になるといえる．ただし，最大巡回路長は組内の全ての世帯を考慮するため，最大最遠距離に比べ，厳密解を求められる範囲が狭い.

6. まとめと今後の課題

本研究では，各組の所属世帯数が平均値から許容範囲内の乖離に収まる範囲内で，最大巡回路長，あるいは最大最遠距離を最小にするような地域分割を求める問題を提起し，数理計画問題として定式化した．それぞれの問題に対する解法を提案し，数値実験を通してそれらを評価した.

ソルバーで解けないような現実的なサイズの問題例（60 世帯以上）を扱う場合，提案法は，精度に改善の余地はあるものの，それなりに有用と思われる．提案法では，交換操作を 1 世帯同士の交換に限っている．複数世帯同士の交換を追加することにより，解の探索範囲が広がり提案解法の精度向上が期待できると考えるが，これは今後の課題である.

最大最遠距離より最大巡回路長を最小化した場合の方がまとまりの良い地域分割が求まることが分かった．今回は，世帯数のばらつきを一定範囲に抑えながら，最大最遠距離（最大巡回路長）を最小化することのみに着目しているので，最大最遠距離（最大巡回路長）に該当しない組については，それらを改善する力が働かない．その結果，組間に交差が存在したまま求解が終了することがしばしば起きている．最大最遠距離（最大巡回路長）の最小化に加え，全ての組の最遠距離（巡回路長）の総和の最小化を考慮することで，組の交差の無い（少ない）より良い地域分割が求まる可能性があるが，これも今後の課題である.

参考文献

[1] 長野市若槻地区上野区区民名簿(2009), 長野市若槻地区上野区, 66pp.

[2] 沼田一道(2011), 汎用ソルバによる巡回セールスマン問題の求解―多項式オーダ本数の部分巡回路除去制約―, オペレーションズ・リサーチ, vol.8, pp.452-455.

[3] 加藤直樹(2008), 数理計画法, コロナ社, 221pp.

[4] GLPK スーパー簡易マニュアル, http://www.iecs.kansai-u.ac.jp/pselab/doc/easymanual.pdf, (最終閲覧日 2013.12.25).

[5] Gurobi Optimization, http://www.gurobi.com/ , (最終閲覧日 2013.12.25).