円形領域への長方形詰込み問題に関する研究

東京理科大学 工学部第一部 経営工学科
沼田研究室 4410006 池上 隼

目次

1．はじめに
1．1．切出し・詰込み問題について

二次元平面上の領域内に様々な形状の図形を互いに重ならないように配置する問題

- **与えられた領域にできるだけ多く詰込む問題**
  →切出し問題，型抜き問題[1]
- **与えられた図形をすべて詰込む仕方で，使用領域が小さくて済む詰込み方を見出す問題**
  →詰込み問題[2]

１．はじめに
１．２．本研究で扱う問題

与えられた多数の長方形を
可変円形領域に詰込むことを考える

与えられた長方形を詰込むことのできる
最小の円を求める問題

1．はじめに
1．3．問題例

木材から角材を切出す場合に現れる

世界的規模で森林の減少が進んでいる

必要な量の角材を
できるだけ小さい直径の丸太から切出す

無駄を減らし，コストの削減に繋がる

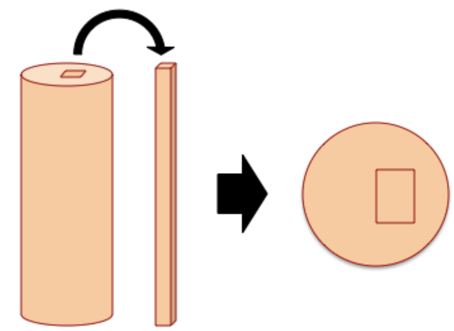


図1. 木材の取出し例

1．はじめに
1．4．研究目的

すべての長方形を詰込むことのできる
最小の円を求める問題

↓

「円形領域への長方形詰込み問題」を数理計画問題として定式化し，解法を検討することを目的とする

2. 提案問題
2. 1. 長方形の設定

- n個の長方形を詰込む
- k番目の長方形の大きさを$a_k \times b_k (k = 1,2, \dots, n)$とする
- 各長方形の90°回転を許す
- 長方形は互いに重ならない

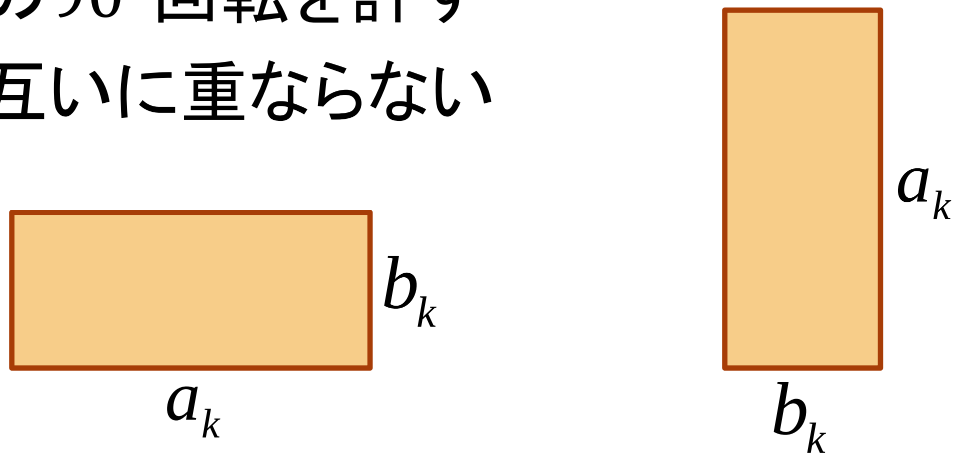


図2. 長方形の寸法（**横向き**）　図3. 長方形の寸法（**縦向き**）

２．提案問題
２．２．円の離散化

- 半径 : R
- 円 : C_R
- 外接する正方形を$2R$等分
- 点(i,j)が左下隅にある単位方眼の名前を(i,j)とする

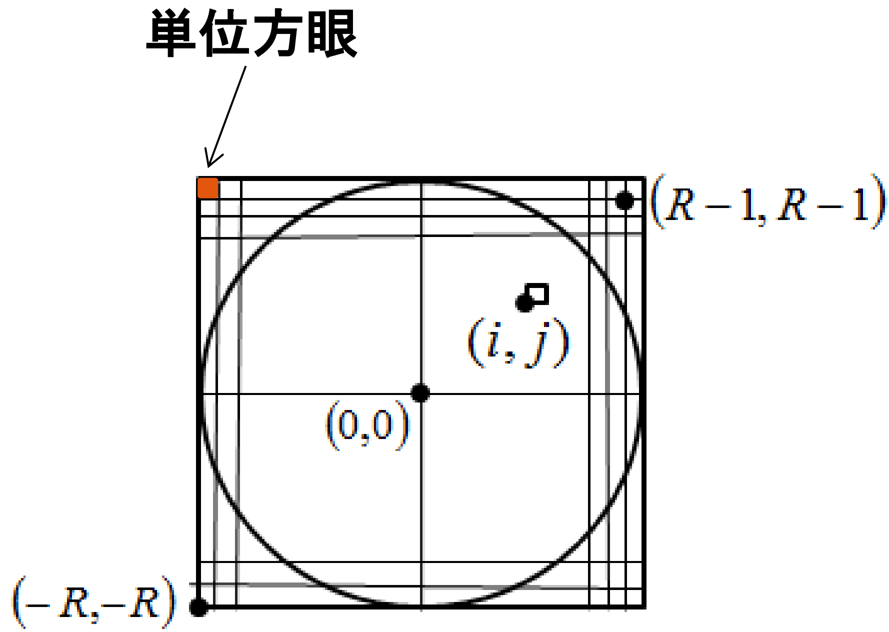


図4. 円の離散化

２．提案問題
２．３．方眼点

- 対象とする方眼点(i, j)は円C_Rに外接する正方形内にある

$$-R \leq i \leq R-1 \quad \cdots (1)$$

$$-R \leq j \leq R-1 \quad \cdots (2)$$

- 円C_Rを表す方眼点(i, j)の集合

$$C_R = \left\{ (i, j) \,\middle|\, \left(i + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(j + \frac{1}{2} \right)^2 \leq R^2 \right\} \quad \cdots (3)$$

2. 提案問題
2. 4. 問題設定

一気に最小円を求めるのは難しい

- 円の半径Rをパラメタとして固定
- 「半径Rの円領域に与えられた全長方形を詰め込めるか？」という決定問題を考える

答えが「yes」となる最小のRと長方形配置を求める

3．定式化
3．1．記号化（1）

長方形kを**横向き**に置いて円C_Rに収容することができる左下隅配置点(i, j)の集合

$$
\begin{aligned}
P_1(k) = \Bigg\{ (i, j) \Bigg| & \left(i+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(j+\frac{1}{2}\right)^2 \le R^2 \wedge \left(i+a_k-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(j+\frac{1}{2}\right)^2 \le R^2 \\
& \wedge \left(i+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(j+b_k-\frac{1}{2}\right)^2 \le R^2 \\
& \wedge \left(i+a_k-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(j+b_k-\frac{1}{2}\right)^2 \le R^2 \Bigg\} \quad \cdots (4)
\end{aligned}
$$

３．定式化
３．２．記号化(２)

長方形kを**縦向き**に置いて円C_Rに収容することができる左下隅配置点(i,j)の集合

$$P_2(k)=\left\{(i,j)\middle|\left(i+\frac{1}{2}\right)^2+\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\le R^2\wedge\left(i+b_k-\frac{1}{2}\right)^2+\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\le R^2\right.$$
$$\wedge\left(i+\frac{1}{2}\right)^2+\left(j+a_k-\frac{1}{2}\right)^2\le R^2$$
$$\left.\wedge\left(i+b_k-\frac{1}{2}\right)^2+\left(j+a_k-\frac{1}{2}\right)^2\le R^2\right\}\quad\cdots(5)$$

３．定式化
３．３．記号化（３）

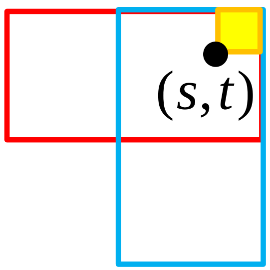


図5. 任意の方眼(s,t)

- 長方形kを**横向き**で置き，それが単位方眼(s,t)を覆うような左下隅配置点の集合

$$Q_1(k,s,t)=\{(i,j)\mid s-a_k+1\le i\le s,\ t-b_k+1\le j\le t\} \quad \cdots (6)$$

- 長方形kを**縦向き**で置き，それが単位方眼(s,t)を覆うような左下隅配置点の集合

$$Q_2(k,s,t)=\{(i,j)\mid s-b_k+1\le i\le s,\ t-a_k+1\le j\le t\} \quad \cdots (7)$$

３．定式化
３．４．決定変数

- 長方形kを**横向き**で左下隅を方眼(i,j)に重ねて置くか否か

$$x_{ijk}=\begin{cases}1: & \text{置く}\\ 0: & \text{置かない}\end{cases}$$

- 長方形kを**縦向き**で左下隅を方眼(i,j)に重ねて置くか否か

$$y_{ijk}=\begin{cases}1: & \text{置く}\\ 0: & \text{置かない}\end{cases}$$

３．定式化

３．５．目的関数

詰込む長方形数を最大にする

$$\max \quad \sum_{k} \sum_{i=-R}^{R-1} \sum_{j=-R}^{R-1} \left\{ x_{ijk} + y_{ijk} \right\} \qquad \cdots (8)$$

目的関数値がnに達したとき「yes」となる

３．定式化
３．６．制約条件（１）

- 長方形kは縦横いずれかの方向でどこか1箇所に置かれれば良い（置かれないこともある）

$$\sum_{i=-R}^{R-1}\sum_{j=-R}^{R-1}(x_{ijk}+y_{ijk})\le 1 \quad {}^{\forall}k(k=1,2,\ldots,n) \quad \cdots (9)$$

- 円C_R内の方眼(s,t)は複数の長方形では覆われない

$$\sum_{k}\left\{\sum_{\substack{i \\ (i,j)\in Q_1(k,s,t)}}\sum_{j} x_{ijk}+\sum_{\substack{i \\ (i,j)\in Q_2(k,s,t)}}\sum_{j} y_{ijk}\right\}\le 1 \quad {}^{\forall}(s,t)\in C_R \quad \cdots (10)$$

３．定式化
３．７．制約条件（２）

長方形$k(k = 1,2, \ldots, n)$は円C_Rからはみださない

$$x_{ijk} = 0 \qquad {}^{\forall}(i, j) \notin P_1(k) \qquad \cdots (11)$$

$$y_{ijk} = 0 \qquad {}^{\forall}(i, j) \notin P_2(k) \qquad \cdots (12)$$

4．求解

前節までの定式化を用いて，汎用MIPソルバー[3]で求解

- 長方形数n : 5
- 近似精度を上げていく

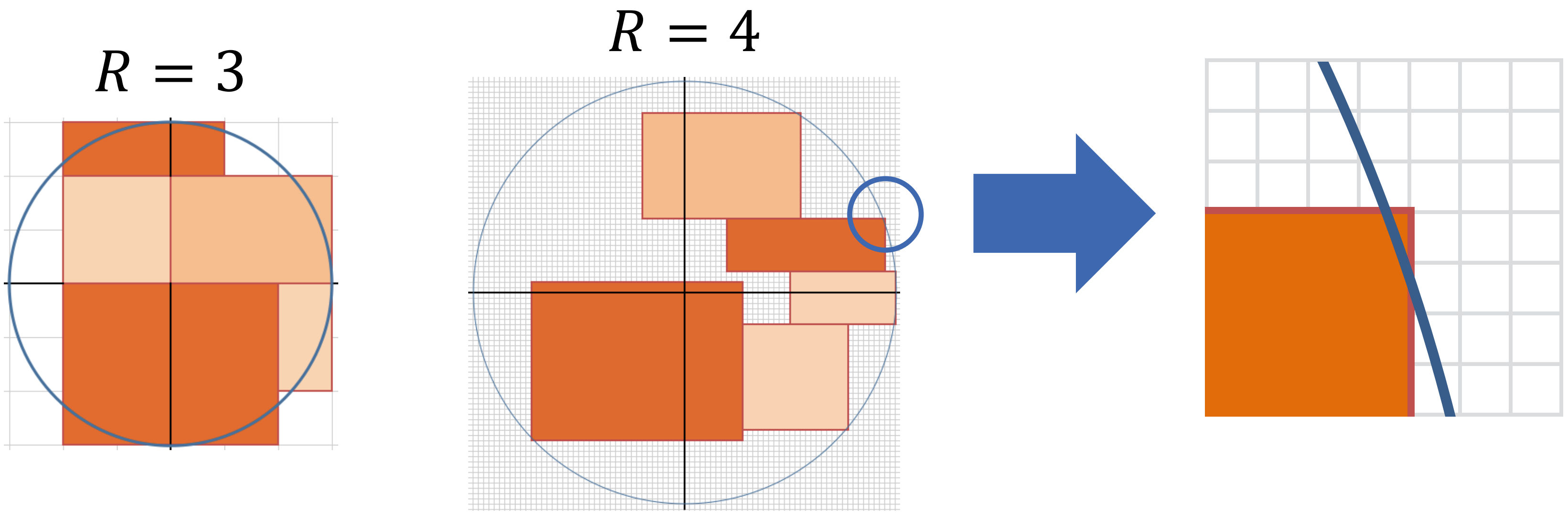


図6. 求解結果

5．提案解法
5．1．概要

発見的解法

長方形群をできるだけ纏まり良く配置し，配置された長方形群を囲う最小円を求める

追加隣接配置 ＋ 交換近傍探索

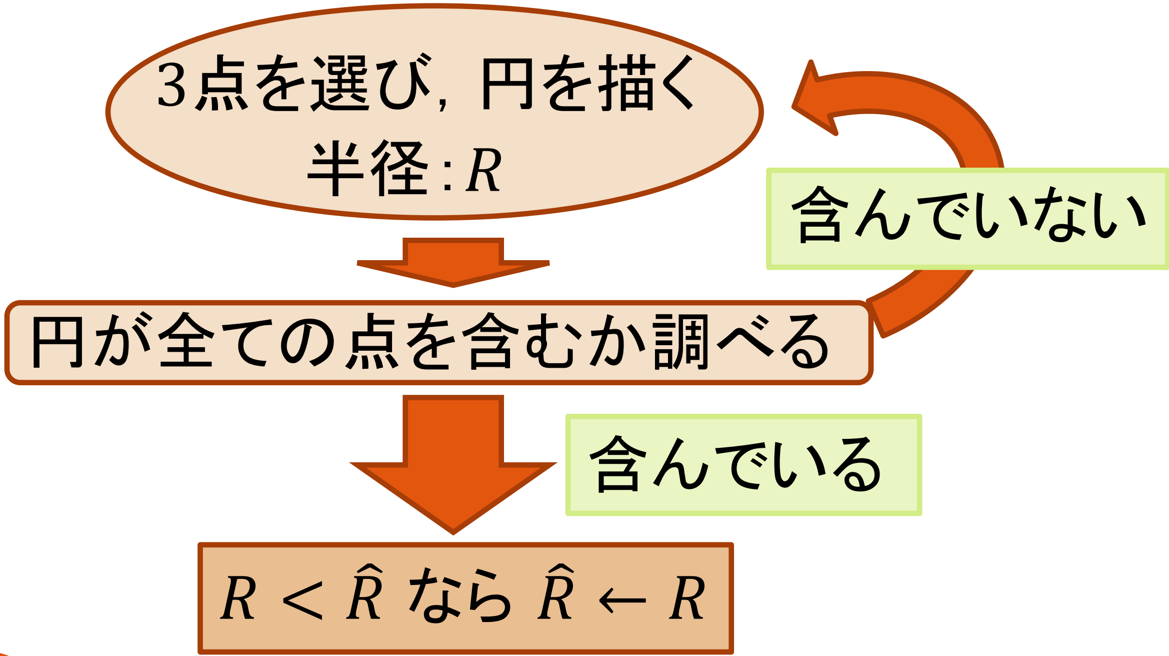
最小包含円

→ **長方形群を囲う最小円を求める**

5. 提案解法
5. 2. 最小包含円

最小包含円とは，平面上の有界な閉集合Xに対して，Xを含む最小の円のことである．[4]

暫定最小半径 : $\hat{R}$



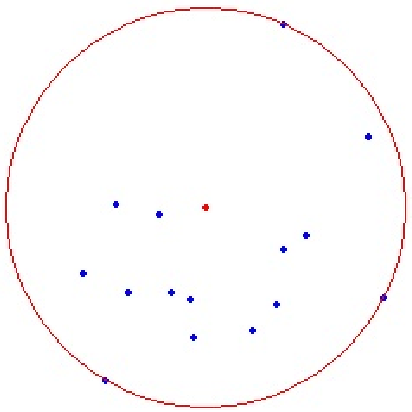


図7. 最小包含円

5. 提案解法
5. 3. 追加隣接配置

初期順列$\sigma = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k), \dots, \sigma(n)\}$を生成

配置する長方形$\sigma(k)$を
既配置の長方形群に隣接するように配置

1回目の配置

最小円を作成

2回目以降

半径を比較

半径を$R(\sigma)$とする

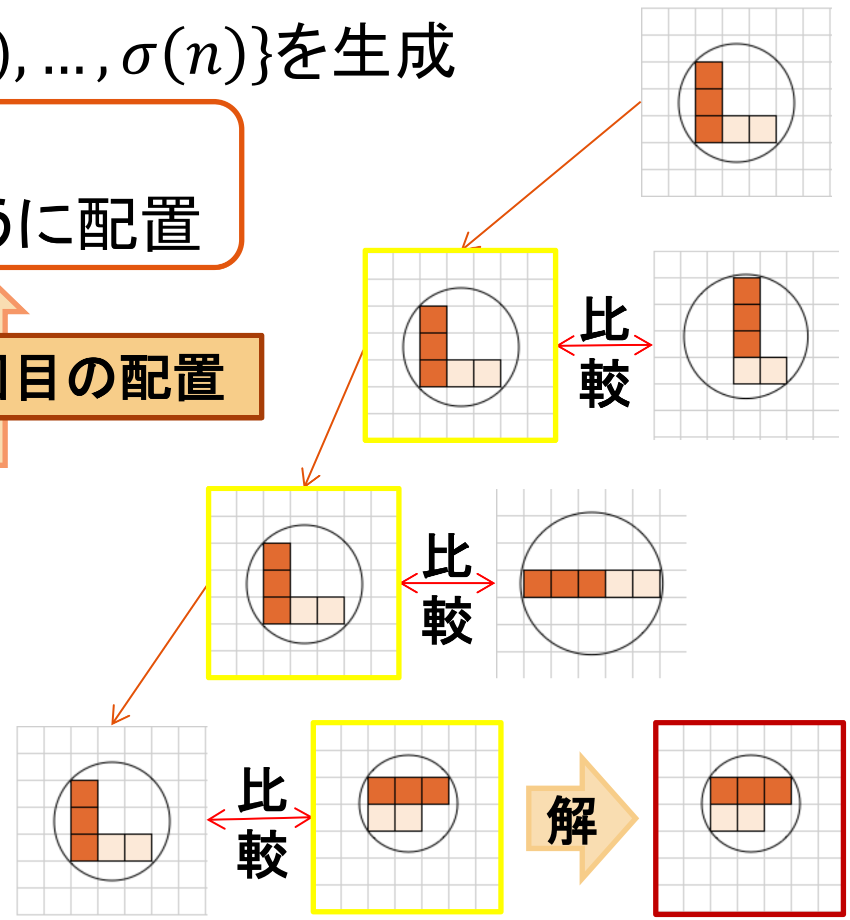


図8. 追加隣接配置

5. 提案解法
5. 4. 交換近傍探索

暫定最小半径$\hat{R} \leftarrow R(\sigma)$, σの2要素を交換してできる順列:$U(\sigma)$

順列$\tau \leftarrow U(\sigma)$
$R(\tau)$を求める

$R(\tau) < \hat{R}$ なら $\hat{R} \leftarrow R(\tau)$
$\tau^* \leftarrow \tau$, $X^* \leftarrow$ 長方形の置き方

$\hat{R}$が更新されていたら$\sigma \leftarrow \tau^*$

更新されなければ$\hat{R}$, τ^*, X^*を解とする

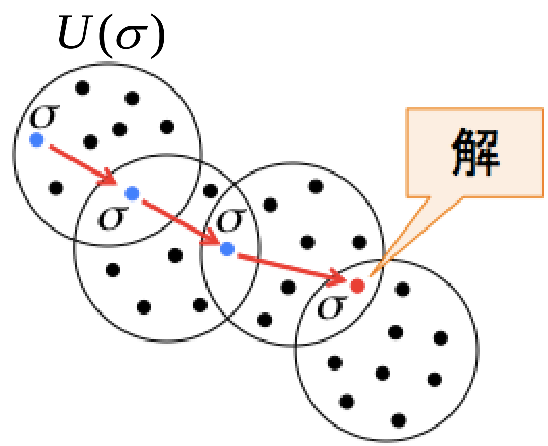


図9. 交換近傍探索

６．数値実験
６．１．設定

初期順列を作成した後
初期解を生成し，
局所探索を行った結果と比較を行う

与えた長方形のデータを表1に示す

表1. 長方形の寸法

n	データ1	データ2	データ3
1	10×20	10×20	10×20
2	10×50	10×50	10×50
3	20×20	20×20	20×20
4	20×30	20×30	20×30
5	20×60	20×60	20×60
6		30×50	30×50
7		30×100	30×100
8		40×60	40×60
9			50×50
10			60×80

6. 数値実験
6. 2. 結果と考察

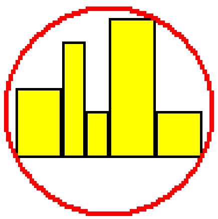


図10. 初期解（データ1）

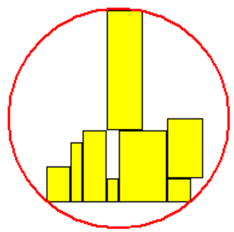


図12. 初期解（データ2）

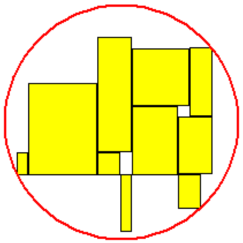


図14. 初期解（データ3）

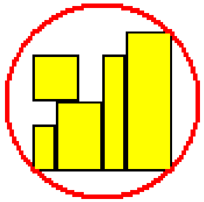


図11. 局所最適解（データ1）

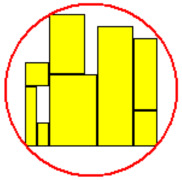


図13. 局所最適解（データ2）

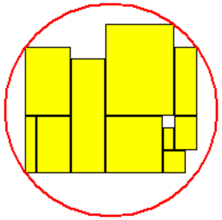


図15. 局所最適解（データ3）

表2. 半径の値

	初期解	局所最適解
データ1	44.721	42.426
データ2	92.195	72.228
データ3	102.110	93.005

- 半径を小さくすることができている
- 無駄なスペースが減っている
- データ1は瞬時に求まるが，データ3では5分程かかる

7. まとめと今後の課題

まとめ

- 提案問題を離散近似し，整数計画問題として定式化した．また，離散近似をせずに解を求める発見的解法を提案した．
- 提案解法は小さな問題例に対してうまく働くことを確認できた
- 円領域では離散的に扱うことが難しく，連続的に扱う必要があることが分かった

今後の課題

- 大きな問題例に対応できるよう，提案解法の「追加隣接配置」を改善することが今後の課題である

参考文献

[1]　今堀慎治　他2名(2002), 配置コストをもつ長方形詰込み問題に対　する局所探索法の高速化, 数理解析研究所講究録, **1297**(12), pp. 107-115.

[2]　今堀慎治, 梅谷俊治(2005), 切出し･詰込み問題とその応用-(2)長方形詰込み問題-, オペレーションズ･リサーチ, **50**(5), pp. 335-340.

[3]　Gurobi Optimizer, http://www.gurobi.com/ (2014/01/21).

[4]　公益社団法人　日本オペレーションズ･リサーチ学会, 最小包含円, http://www.orsj.or.jp/~wiki/wiki/index.php/最小包含円 (2014/01/21).

[5]　石畑清(2002), 点の集合を包含する球, IPSJ Magazine, **43**(9), pp. 1009-1015.

[6]　柳浦睦憲, 茨木俊秀(2006), 組合わせ最適化-メタ戦略を中心として-, 朝倉書店, 237pp.

ご清聴ありがとうございました