2016-04-12,15

平成28年度
オペレーションズ・リサーチ1（OR1）
数理計画法1（MP1）

担当： 沼田一道
numatakzmt@gmail.com
（http://numaf.net/）

経営工学科はどんな学科か

経営に関する問題を工学的に考えるところ

- 知識，理論，技術の教授
- 考え方を伝える（内容を伴って）
- 「知っている，理解できる」だけでは不充分
- 「問題を発見できる」，「問題解決に寄与できる」
- 最終的には「卒業研究／論文」で確認（最終試験）

物事には“もの”と“こと”がある

夏目 漱石：「人生」（五高校友会雑誌「龍南会雑誌」49号，明治29年）

『空を劃して居る之を物といひ，時に沿ふて起る之を事といふ，．．．．』

経営工学とは

“こと”の処理・運営に関する問題を，認識し，解決するための考え方／諸方法の　集まり

- 工学における経営工学の位置づけ
  - （動作する，機能する ➡ 他学科）
  - 安く，早く作る
  - 客の気に入るものを作る
  - 不良品の減少
  - 満足のいくタイミングで届ける
  - （広義の）情報工学
- モデルの提案，表現，解析 ➡ OR
  - 最適な計画，選択 ➡ 数理計画

OR：対象の数理的構造，定量的関係を把握・理解・記述する

- 混雑現象の解析
- 不確定な状態変化の記述
- 日程計画
- 在庫，探索，信頼性

数理計画：可能な選択範囲の中から最も良いものを見出す

- モデル化（定式化） と 計算
- 可能な選択肢の集合（制約条件／実行可能領域）
- 善し悪しの基準（目的関数）
- （分類）線形計画，組み合せ計画，非線形計画
- （例） 操業計画，輸送計画，交通計画，割当問題

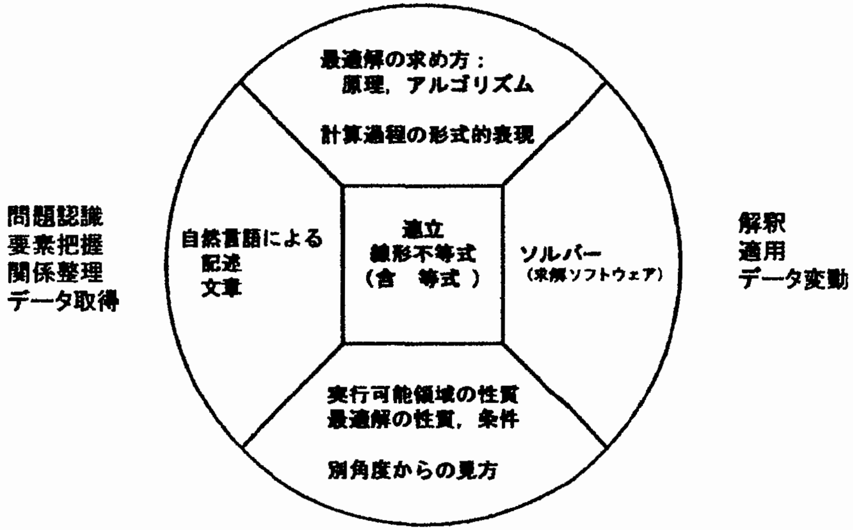
OR1/MP1では，線形計画（モデル）を学ぶ

- 線形の目的関数の最大化（最小化）
- 線形不等式（等式）の制約条件
- 非負の決定変数

- 多くの計画問題がこの形（線形）で書ける

- 実行可能領域の性質： 線形代数
- 最適解の求め方：原理，アルゴリズム

線形計画



参考書

- Chvátal Vašek： Linear Programming, W. H. Freeman and Company, 1983.
- 阪田，藤野（訳）：線形計画法（上），啓学出版，東京，1986.
- 大鹿，一森：オペレーションズ・リサーチ ―モデル化と最適化―，共立出版，1993.
- 加藤直樹：数理計画法 ―コンピュータサイエンス教科書シリーズ (19)―，コロナ社，2008.
- 今野，鈴木（編）：整数計画法と組合せ最適化 ―ORライブラリー (7)―，日科技連，1982.
- 福島雅夫：数理計画法入門 ―システム制御情報ライブラリー (15)―，朝倉書店，1996.

講義用メモ： http://numaf.net/Z9/z9.html
の28年度用リンクから（中身は27年度版とほぼ同じ！）

0　最適化モデル

1　線形計画 (Linear Programming)

目的関数 制約条件 ともに 線形

1.1　例

a. 生産計画

ある製造会社は，m 種類の生産要素（原材料，労力，エネルギー）F_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ を用いて，n 種類の製品 P_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を製造・販売している．

製品 P_j 1 単位 の製造に必要な生産要素 F_i の量を a_{ij} （トン，人日，etc）とする．

生産要素 F_i の使用可能上限 を b_i とする．

製品 P_j 1 単位当たりの利益（constant と仮定）を c_j 円とする．

総利益が最大となるように，各製品の生産量 x_j **（単位）を定めよ．**　ただし，$x_j \geq 0$.

b. 問題（飼料混合問題）

ある養鶏業者は，n 種類の市販飼料 S_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ から購入して，鶏の生育に必要な m 種類の栄養素 V_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ を確保している．

栄養素 V_i の必要量（全鶏 1 カ月分）を b_i g とする．

飼料 S_j 1kg 当りの栄養素 V_i の含有量 (g) を a_{ij} g/kg とする．

飼料 S_j の 価格 を c_j 円/kg とする．

（1 カ月の）飼料代が最小となるように，各飼料の購入量 y_j (kg) **を定めよ．**　ただし，$y_j \geq 0$.

c. 輸送問題　略.

1.2　数値例 と その解

３種の資源（石油，電力，労力）を用いて，２種の製品（アメリン，ブテリン）を製造している化学会社の例.

製品 1 単位の製造に必要な各資源の量（a_{ij}），A（アメリン）,B（ブテリン）1 単位当りの利益（c_j）と各資源の利用限度（b_i）が次表で与えられるとき，A,B を何単位ずつ製造するのが最適か？

資源と製品

資源＼製品	アメリン	ブテリン	資源の上限
石油（kl）	9	4	360
電力（kwh）	4	5	200
労力（人日）	3	10	300
利益（万円）	7	12	

定式化： アメリンを x 単位，ブテリンを y 単位 生産する．

$$
\begin{cases}
\text{maximize} & z = 7x + 12y \\
\text{subject to} & 9x + 4y \leq 360 \\
 & 4x + 5y \leq 200 \\
 & 3x + 10y \leq 300 \\
 & x\ , \quad y \geq 0
\end{cases}
$$

- **図による解法：** 実行可能領域（許容領域）
- slack **変数：** 2 次元 → 5 次元
- **原理と組織的解法：** 単体（simplex）法 （最も基本的）

1.3 行列による表現

—正準形と標準形—

現実定式化 ⇒ { min/max , ≤, ≥, = } 混在 ⇒ 標準化

[**正準形**]

$$
\begin{cases}
\max & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
 & \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
 & x_1\ ,\ x_2\ ,\ \cdots\ ,\ x_n \geq 0
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
\max & z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{cases}
$$

[**標準形**] （ただし $m' < n'$）

$$
\begin{cases}
\max & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_{n'}x_{n'} \\
\text{s.t.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n'}x_{n'} = b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n'}x_{n'} = b_2 \\
 & \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
 & a_{m'1}x_1 + a_{m'2}x_2 + \cdots + a_{m'n'}x_{n'} = b_{m'} \\
 & x_1\ ,\ x_2\ ,\ \cdots\ ,\ x_{n'} \geq 0
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
\max & z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{cases}
$$

- 上記以外の形は 符号反転，変数変換，新変数導入 等により，等価な 正準形／標準形に変換可能である．
- 正準形と標準形も交互に交換可能である．

変換方法

- 目的関数 の min と max
- 等号制約 と 不等号制約（slack 変数の導入）
- 非負制約 の 無い変数（自由変数）
- 不等号制約 の ≤ と ≥
- $x_j \geq t$ の 平行移動

問題 — Chvátal/阪田他訳：Linear Programming/線形計画法 (上) より —

1　つぎの中で正準形の問題はどれか．

$$
\text{(a)}\ \left\{\begin{array}{lrcrcr}
\text{max} & 3x_1 & - & 5x_2 & & \\
\text{sub. to} & 4x_1 & + & 5x_2 & \geq & 3 \\
 & 6x_1 & - & 6x_2 & = & 7 \\
 & x_1 & + & 8x_2 & \leq & 20 \\
 & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0
\end{array}\right.
\qquad
\text{(b)}\ \left\{\begin{array}{lrcrcr}
\text{max} & 8x_1 & - & 4x_2 & & \\
\text{sub. to} & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\
 & 9x_1 & + & 5x_2 & \leq & -2 \\
 & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0
\end{array}\right.
$$

$$
\text{(c)}\ \left\{\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\text{min} & 3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & & \\
\text{sub. to} & 9x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & + & 3x_5 & \leq & 5 \\
 & 8x_1 & + & 9x_2 & + & 7x_3 & + & 9x_4 & + & 3x_5 & \leq & 2 \\
 & & & & & & & & & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 & \geq & 0
\end{array}\right.
$$

2　正準形にしなさい．

$$
\text{(a)}\ \left\{\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\text{min} & -8x_1 & + & 9x_2 & + & 2x_3 & - & 6x_4 & - & 5x_5 & & \\
\text{sub. to} & 6x_1 & + & 6x_2 & - & 10x_3 & + & 2x_4 & - & 8x_5 & \geq & 3 \\
 & & & & & & & & & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 & \geq & 0
\end{array}\right.
$$

3　問題 (p1) は可能でなく，問題 (p2) は有界でないことを証明しなさい．

$$
\text{(p1)}\ \left\{\begin{array}{lrcrcr}
\text{max} & 3x_1 & - & x_2 & & \\
\text{sub. to} & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & -2x_1 & - & 2x_2 & \leq & -10 \\
 & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0
\end{array}\right.
\qquad
\text{(p2)}\ \left\{\begin{array}{lrcrcr}
\text{max} & x_1 & - & x_2 & & \\
\text{sub. to} & -2x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\
 & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & -2 \\
 & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0
\end{array}\right.
$$

4　つぎの LP 問題（線形計画問題）が，

a. 最適解をもつ　　b. 可能でない　　c. 有界でない

ための数 s, t に対する必要充分条件を求めよ．

$$
\left\{\begin{array}{lrcrcr}
\text{max} & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{sub. to} & sx_1 & + & tx_2 & \leq & 1 \\
 & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0
\end{array}\right.
$$

5　ある肉詰製造工場では，毎日豚肉をもも肉 480 単位，腹肉 400 単位，肩肉 230 単位生産している．これらのどの製品もそれぞれ生肉または燻製として売られる．1 日の規定労働時間内に燻製にできるもも肉，腹肉，肩肉の総量は 420 単位である．さらに，規定時間外に 250 単位を超過費用のもとで燻製にすることができる．単位あたりの純益は，もも肉（生 8 ドル，燻製 14 ドル，規定時間外燻製 11 ドル），腹肉（生 4 ドル，燻製 12 ドル，規定時間外燻製 7 ドル），肩肉（生 4 ドル，燻製 13 ドル，規定時間外燻製 9 ドル）である．

例えば，「もも肉（生 165 単位，燻製 280 単位，規定時間外燻製 35 単位），腹肉（生 295 単位，燻製 70 単位，規定時間外燻製 35 単位），肩肉（生 55 単位，燻製 70 単位，規定時間外燻製 105 単位）」とする生産計画の純利益は 9965 ドルである．

純利益を最大にする生産計画を求める問題を，正準形の LP として定式化せよ．