3 二段階単体法

一般の標準形で与えられた問題をどう解くか？

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} \max & z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad (\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0} \text{ として一般性を失わない})$$

初期端点（可能基底解）が求まれば，後は 2 章の **単純単体法**で解ける．

3.1 数値例

$$(\mathrm{p}) \qquad \begin{cases} \max & z = 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \\ \text{s.t.} & x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ & 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

3 個の変数を基底変数として選び，掃き出しを行なっても，初期端点（可能基底解）が得られるとは限らない． 何故ならば

- 係数行列 A の（選んだ基底変数に）対応する列ベクトルが一次独立である保証はない（一次独立でなければ端点を与えない）
- 一次独立であったとしても,（一意に決まる）基底解が非負条件を満たす保証はない

からである．
この問題を解決するため，人工変数を用いて初期端点（可能基底解）を求める処理を付加した単体法が考案された． これを **二段階単体法** と呼んでいる．
まず，人工変数（x_5, x_6, x_7）を導入して制約条件を書き換える．

$$(\#) \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + x_6 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 7 \\ x_1,\ x_2,\ x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

元々の制約条件が定める実行可能領域を $\boldsymbol{F}$，人工変数を付加した制約条件が定める実行可能領域を $\boldsymbol{F}^{\#}$ とする． ここで，以下に注意する．

- $\boldsymbol{F}$ は空集合の可能性があるが，$\boldsymbol{F}^{\#}$ は空ではない．
- $\boldsymbol{F}$ の “端点（可能基底解）の末尾に 3 個（人工変数の個数）の 0 を付したもの” は $\boldsymbol{F}^{\#}$ の 端点（(#) の可能基底解）である．
- $\boldsymbol{F}^{\#}$ の “端点（可能基底解）で，末尾 3 個（人工変数の個数）が 0 のものが存在すれば，それから末尾 3 個の 0 を除いたものは $\boldsymbol{F}$ の端点（(p) の可能基底解）である．
- $\boldsymbol{F}$ が空集合でなければ，$\boldsymbol{F}^{\#}$ の元で，末尾3個（人工変数の個数）が 0 のものが存在する．（対偶）

(#) は，人工変数を基底変数とする基底形式になっており，$\boldsymbol{b} \geq 0$ と仮定しているから，$\boldsymbol{F}^{\#}$ の 1 つの端点（可能基底解）を与えている．
この端点から出発して，単体法で $\boldsymbol{F}$ の端点（人工変数がすべて非基底変数になっている $\boldsymbol{F}^{\#}$ の端点）へ向かって移動する．このためには，$w' = x_5 + x_6 + x_7$ （$w' \geq 0$）を最小化すればよい．ここでは（混乱を避けるために），$w = -x_5 - x_6 - x_7$ （$w \leq 0$）を最大化すると考えよう．
第一段階で解くべき問題は次のようになる．

$$
\text{(q)} \qquad \begin{cases}
\max \quad w = & \quad -x_5 - x_6 - x_7 \\
\text{s.t.} & x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\
 & 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + x_6 = 6 \\
 & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 7 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 \geq 0
\end{cases}
$$

(q) の制約条件部分は可能基底形式（可能字引）であり，w の目的行へ各制約式を足し込めば，可能拡大基底形式（拡大字引）となる．これを初期端点として，単純単体法（前章）で最適解を見いだす．w は上に有界（0 以下）であるから，必ず有限の最大値が得られる．
この手続きを **phase1** と呼ぶ．

phase1

w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	定数
-1	4	2	0	1	0	0	0	15
0	1	-2	2	-1	1	0	0	2
0	2	2	-3	1	0	1	0	6
0	1	2	1	1	0	0	1	7

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	定数
-1	0	10	-8	5	-4	0	0	7
0	1	-2	2	-1	1	0	0	2
0	0	6	-7	3	-2	1	0	2
0	0	4	-1	2	-1	0	1	5

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	定数
-1	0	0	$\frac{11}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{11}{3}$
0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{3}$
0	0	1	$-\frac{7}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
0	0	0	$\frac{11}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{11}{3}$

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	定数
-1	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
0	1	0	0	0	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	3
0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{22}$	$-\frac{1}{22}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{3}{2}$
0	0	0	1	0	$\frac{1}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	1

$$\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

最適タブローが得られた． w は，端点 $(3, \frac{3}{2}, 1, 0, 0, 0, 0)$ で 最大値 $w^o = 0$ をとる．
ここでは $w^o = 0$ であったが，一般には，このとき得られる最大値 w^o の値によって，以後の議論は二つに分かれる．

(1) $w^o < 0$ のとき $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{F} = \phi$.

(2) $w^o = 0$ のとき $\Longrightarrow$ $w^o = 0$ を与える $\boldsymbol{F}^{\#}$ の 端点から，その人工変数部分（非基底変数のはず）を取り除いたものは $\boldsymbol{F}$ の端点である [1].

(1) の場合，元の問題には実行可能解が存在しないことを検知して終了する．
(2) の場合，元の問題の初期端点が得られるので，単純単体法を開始出来る．
上記の数値例は (2) であり，$\boldsymbol{F}^{\#}$ の端点 $(3, \frac{3}{2}, 1, 0, 0, 0, 0)$ から人工変数部分を取り除いた $(3, \frac{3}{2}, 1, 0)$ は $\boldsymbol{F}$ の端点である．これを初期可能基底解（x_1, x_2, x_3 : 基底変数，x_4 : 非基底変数）として，本来の目的関数 z を 目的行にもつ拡大基底形式を作り，単純単体法（2 章）を実行する．
この手続きを **phase2** と呼ぶ．

phase2

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数
-1	2	2	-1	3	0
0	1	0	0	0	3
0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
0	0	0	1	0	1

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数
-1					
0					
0					
0					

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数
-1					
0					
0					
0					

3.2 一般の二段階単体法

一般の標準形（ただし，$\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$ とする）で与えられた問題 (P) に，人工変数 $\boldsymbol{x}'$ （次元は $m =$ 制約式数）を導入し，$-\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{x}'$ を最大化する問題 (Q) を解く．(Q) は初期拡大基底形式が直ちに得られるので，単純単体法で解ける．

$$
(\mathrm{P}) \begin{cases} \max & z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (\ \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}\ ) \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{cases} \Longrightarrow \quad (\mathrm{Q}) \begin{cases} \max & w = \quad -\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{x}' \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ ,\ \boldsymbol{x}' \geq \boldsymbol{0} \end{cases}
$$

(Q) を解いて得られた w の最大値 w^o の値によって，次の (1)，(2) に分かれる．

[1] 0 をとる基底変数ということもあり得るが，このときは，w の値を 0 に保ったまま，この人工（基底）変数を基底から追い出し，本来の変数で非基底のものを基底変数にすることが出来る．

(1) $w^o < 0$ のとき $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{F} = \phi$ なので停止する．

(2) $w^o = 0$ のとき $\Longrightarrow$ 最適解は $(\boldsymbol{x}^o, \boldsymbol{0}')$ の形をしており，人工変数部分は非基底変数のはずであるから，$(\boldsymbol{x}^o)$ は $\boldsymbol{F}$ の端点になる．
この端点（基底形式）から元の問題 (P) の初期拡大基底形式を作り，単純単体法を実行する．

このようにして，二段階単体法は標準形の線形計画問題（従って任意の線形計画問題）を解くことが出来る．

3.3 二段階単体法の概略