5　行列表現，改訂単体法，感度解析

単体法の実行過程を行列によってコンパクトに表現する．
拡大基底形式を直接表現したものと目的関数の表式に注目したもの．
後者からは改訂単体法が導かれる．
制約条件式の右辺値を変化させるとき，最適解の値はどのように変化するか？

5.1　行列表現

$$
(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} \max & z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} A = (\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \ldots\, \boldsymbol{a}_n) \\ (A \in M(m,n)\,,\ \mathrm{rank}(A) = m) \end{array}
$$

- 基底変数 $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}\}$ と非基底変数 $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-m}}\}$ が与えられたとする．
- B：基底変数に対応する A の列ベクトルを取り出して並べたもの．(基底行列)
- B は正則 で $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は 非負．
- N：非基底変数に対応する A の列ベクトルを取り出して並べたもの．
- A の列ベクトル，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{c}$ を 上記の順に並び換え，(P) を (P′) のように分離して書く．

$$
(\mathrm{P}') \qquad \begin{cases} \max & z = \boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x}_N \\ \text{s.t.} & B\boldsymbol{x}_B + N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}_B\,,\quad \boldsymbol{x}_N \geq \boldsymbol{0} \end{cases}
$$

現在の基底変数に対する拡大基底形式は以下のように書ける．

$$
\begin{cases} \boldsymbol{x}_B + B^{-1}N\boldsymbol{x}_N = B^{-1}\boldsymbol{b} \\ -z + (\boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T B^{-1}N)\boldsymbol{x}_N = -\boldsymbol{c}_B^T B^{-1}\boldsymbol{b} \end{cases}
$$

5.2　simplex 乗数

z を $\boldsymbol{x}_N$ だけで表わすため，$B\boldsymbol{x}_B + N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}$ の各行に然るべき数を乗じて，目的行から引き，z の表式から $\boldsymbol{x}_B$ を消去する．　この制約式の各行に乗ずる値を “simplex 乗数” といい，$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ と書く．
また，z を $\boldsymbol{x}_N$ だけで表わしたときの $\boldsymbol{x}_N$ の係数を相対コストと呼ぶ．

- $\boldsymbol{u}$ の値は，連立方程式 $\boldsymbol{c}_B^T - \boldsymbol{u}B = 0$ で決まる．
- $\boldsymbol{u}$ が決まると，相対コスト $(\boldsymbol{c}'_N)^T = (\,c'_{j_1}, c'_{j_2}, \ldots, c'_{j_{n-m}}\,)$ が $(\boldsymbol{c}'_N)^T = \boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{u}N$ と 決まる．
- $z_0 = \boldsymbol{u}\boldsymbol{b}$.
- $\boldsymbol{c}'_N$ が求まると取入れ変数（j^*）が決まる．(または，最適！)
- x_{j^*} 列の係数列ベクトルは $\boldsymbol{a}'_{j^*} = B^{-1}\boldsymbol{a}_{j^*}$，また定数列は $\boldsymbol{b}' = B^{-1}\boldsymbol{b}$ となる．(基底形式 $\boldsymbol{x}_B + B^{-1}N\boldsymbol{x}_N = B^{-1}\boldsymbol{b}$ より)

5.3 改訂単体法（改訂 simplex 法）

simplex タブローの代わりに，simplex 乗数と基底行列の逆行列を用いる単体法

[算法　revised simplex method]

step1 可能基底行列 $B = (\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_m})$ を定める．

step2 $\boxed{\boldsymbol{u}B = \boldsymbol{c}_B^T}$ を解いて，$\boldsymbol{u}$ を求める．

さらに $(\boldsymbol{c}'_N)^T = \boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{u}N$ を求め，最適性の判断／取入れ変数（x_{j^*}）の決定を行なう．

step3 $\boxed{B\boldsymbol{a}_{j^*}{}' = \boldsymbol{a}_{j^*}}$ を解いて，$\boldsymbol{a}'_{j^*}$ を 計算．

step4 $\boxed{B\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b}}$ を解いて，$\boldsymbol{b}'$ を計算し，追い出し変数（x_{i_d}）を決定する．

$B \leftarrow (\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_{d-1}}, \boldsymbol{a}_{j^*}, \boldsymbol{a}_{i_{d+1}}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_m})$

goto step2.

[$B\boldsymbol{x} = \vec{\alpha}$ ／ $\boldsymbol{x}B = \vec{\alpha}$ の 計算]

5.4 感度解析

目的関数の最大値 z^o を，制約式右辺値 $b_1, \ldots, b_m$ の関数と考える．これらが変動したとき z^o がどのように変化するか？

最適タブローを与える simplex 乗数を $\boldsymbol{u}^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*)$ とする．　このとき　$z^o = \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{b}$　であるから

$$\frac{\partial z^o}{\partial b_i} = u_i^* \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

♡ $u_i^* > 0$ のとき

♡ $u_i^* = 0$ のとき

♡ $u_i^* < 0$ のとき

補遺)　a_{ij} の変化するとき．　　$\boldsymbol{c}$ の変化するとき．