# 7 双対原理

任意の線型計画問題に対して，その "双対問題" が存在する．
双対問題は，元の問題（主問題という）を別の（逆の）角度から捉えたり，問題の構造を理論的に考察したりする際に，きわめて重要な役割を果たす．

## 7.1 形式的対応

双対性が現れる分野はいろいろあるが，例えば命題論理などが有名である．

| 主命題 | $\Longleftrightarrow$ | 双対命題 |
|---|---|---|
| $\vee \quad \wedge \quad x \quad \bar{y} \quad 1 \quad 0$ | $\Longleftrightarrow$ | $\wedge \quad \vee \quad \bar{x} \quad y \quad 0 \quad 1$ |

主命題が真であれば双対命題は偽，主命題が偽であれば双対命題は真である．
LP においても同様に

| 主問題 | $\Longleftrightarrow$ | 双対問題 |
|---|---|---|
| | $\Longleftrightarrow$ | |

の対応関係が成立する．主問題が最大値（最小値）をもてば，双対問題も最小値（最大値）をもち，両者の値は一致する．
主問題が非有界解をもつとき，双対問題は実行可能解をもたない．また主問題が実行可能解をもたないとき，双対問題は非有界解をもつ．

## 7.2 双対問題の経済的意味

- 工場（資源）をもち利益最大の生産を目指す生産業者 と 工場を最小費用で買い取ろうとする資源買収業者 の ビジネスゲーム
- 第 $i$ 資源の買取価格 $y_i$
- 第 $j$ 製品（$j = 1, 2, \ldots, n$）の価値

  1 単位生産したときの利益： $c_j$

  1 単位の生産に必要な資源（$a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$）を売ったときの利益： $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$

買収可能な範囲内で総買収価格を最小にする問題は，元の生産計画問題の双対問題である．
（正確には，"互いに双対"．　一方を Primal Problem と呼び，他方を Dual Problem と呼ぶ）

[数値例]

$$
(\mathrm{p}) \begin{cases} \max & z = 7x_1 + 12x_2 \\ \text{s.t.} & 9x_1 + 4x_2 \leq 360 \\ & 4x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ & 3x_1 + 10x_2 \leq 300 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}
\quad \Longleftrightarrow \quad
(\mathrm{d}) \begin{cases} \min & w = 360y_1 + 200y_2 + 300y_3 \\ \text{s.t.} & \\ & \\ & \\ & \end{cases}
$$

行列で表現すれば

$$(\mathrm{P})\begin{cases}\max & z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\end{cases} \qquad (\mathrm{D})\begin{cases}\min & w = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} & A^T\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}\end{cases}$$

一般につぎが成立する（7.4 節で証明）.

- （任意の）買収総額（$w$）は最大操業利益（$z_{\max}$）以下にはなれない.
- （任意の）操業利益（$z$）は最小買収価格（$w_{\min}$）以上にはなれない.

♡ よって $z_{\max} = w_{\min}$.

## 7.3 双対単体法

前節 (d),(D) のタイプの LP 問題は，もちろん二段階法で解けるが，以下の方法を用いると便利である．また一般の問題においても，右辺ベクトル $\boldsymbol{b}$ をパラメトリックに変化させる場合など，最適性を満たしているが実行可能性を満足しない解が分かっているときにも適用できる.

2,3 章で述べた単体法は主単体法と呼ばれる.

[双対単体法]　—主単体法とは双対の関係にある—

- 最適性を保ちながら基底交換を行ない，実行可能解に達する.
- 最も実行不可能なものを追い出し変数に選ぶ.
- 最適性（双対可能性ともいう）を保つように取入れ変数を選ぶ.

[数値例]

## 7.4 双対定理

主問題の最適解と双対問題の最適解の間の関係を明らかにする.

$$(\mathrm{P})\begin{cases}\max & z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\end{cases} \qquad (\mathrm{D})\begin{cases}\min & w = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} & A^T\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}\end{cases}$$

♠ “shadow price” の定義

shadow price : 最適解（最適基底形式）に対応する simplex 乗数.

♣ (P) の最適解（除 スラック変数）を $x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o$ とする.

♢ (P) の shadow price を $y_1^o, y_2^o, \ldots, y_m^o$ とする.

**1** (P) と (D) の実行可能解はつぎの "基本不等式" を満たす.

$$\forall \boldsymbol{x} \in F_{(\mathrm{P})} \quad \forall \boldsymbol{y} \in F_{(\mathrm{D})} \qquad z(\boldsymbol{x}) \leq w(\boldsymbol{y})$$

**1′** $\boldsymbol{x} \in F_{(\mathrm{P})}$ と $\boldsymbol{y} \in F_{(\mathrm{D})}$ が，つぎの "相補スラック条件" を満たせば $z(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{y})$ である.

$$\begin{cases} x_j \cdot \{\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} - c_j\} = o & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ \{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\} \cdot y_i = o & (i = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

**2** shadow price $\boldsymbol{y}^o$ は (D) の制約条件を満たす.

**3** (P) の最適解 $\boldsymbol{x}^o = (x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o)$ と shadow price $\boldsymbol{y}^o = (y_1^o, y_2^o, \ldots, y_m^o)$ は相補スラック条件 を満たす.

**4** $z(\boldsymbol{x}^o) = w(\boldsymbol{y}^o)$ である.

**5** (P) の shadow price $\boldsymbol{y}^o$ は双対問題 (D) の最適解である.

結局,

| |
|---|
| shadow price $\boldsymbol{y}^o$ は 双対問題の最適解である. |
| 双対問題は shadow price を 最適解 とする 線形計画問題である. |
| (shadow price ： 最適買収価格) |

**[双対定理]**

| |
|---|
| 主問題 (P) と双対問題 (D) のどちらか一方が最適解をもてば，他方も最適解をもち，両者の値（(P) の最大値と (D) の最小値）は一致する. |
| 両者の最適解 $\boldsymbol{x}^o$ と $\boldsymbol{y}^o$ は互いに相補スラック条件を満たす. |

[証明]

[練習問題]
(D) の双対問題が (P) になることを確かめよ.

## 7.5 一般の場合の双対関係

$$\begin{cases} \bullet\text{max/min} \\ \bullet\text{不等式制約} \\ \bullet\text{非負変数} \end{cases} \iff \begin{cases} \bullet\text{min/max} \\ \bullet\text{非負変数} \\ \bullet\text{不等式制約} \end{cases}$$

a. 自由変数

b. 等式条件