1 構造モデル（グラフ）

1.1 グラフとは

- 対象要素間の関係を直感的に把握するための数学的道具
- （例） 家系図，組織図，システム構成図，道路網，通信網，アローダイアグラム
- 点の集合 V と，点と点を結ぶ枝の集合 E の組 (V,E) を “グラフ” と呼び，グラフ G を $G=(V,E)$ のように表わす．
- 特に断らない限り，点数は有限，ある 2 点間を同方向に結ぶ枝は 1 本以下とする．(cf. 自己閉路)
  - 無向グラフ（無向枝，端点）
  - 有向グラフ（有向枝，始点，終点）

1.2 グラフの応用例

- 4 色問題
- 一筆書き（Königsberg の橋）

1.3 グラフの基本概念・用語

■ 部分グラフ：「グラフ $H=(U,F)$ が，グラフ $G=(V,E)$ の部分グラフ」
$\Leftrightarrow$ 「$U \subset V$ ， $F \subset E$ ， かつ F に属する枝の端点（始終点）は U に属する」

■ 端点／始終点を共有する枝の順列（シーケンス）：間接的「関係」を表す

- 道（path）：有向枝の順方向の順列（枝の集合）
- 鎖（chain）：有向枝（方向無視）／無向枝の順列（枝の集合）
- 単純な道（simple path）：同一点を 2 度以上通過しない道
- 単純な鎖（simple chain）：同一点を 2 度以上通過しない鎖
- ループ（loop）：始点と終点の一致する鎖
- 閉路（closed path）：始点と終点の一致する道
- 単純なループ／閉路：同一点を 2 度以上通過しないループ／閉路

■ 点同士，グラフ全体が繋がっているかどうか：連結性

- 点と点が連結：点と点の間に鎖が存在する
- グラフが連結（connected）：そのグラフの任意の 2 点が連結
- グラフが強連結（strongly connected）：そのグラフの任意の 2 点間に道が存在する
- 連結成分： 連結な極大（精一杯大きくとった）部分グラフ
- 強連結成分：強連結な極大（精一杯大きくとった）部分グラフ

★ 有向か無向か，連結か非連結か，ループ／閉路を含むか否か

★ ある性質を有するグラフ：完全グラフ，二部グラフ，etc

★ 部分グラフに，上記性質を満たすものを見出す．

1.4 木（tree）： 無向グラフ

- 木（tree）： 連結でループを含まないグラフ

  木の性質　　i) 枝の数 $= |V| - 1$　　ii) 枝 1 本追加 $\Rightarrow$ ループができる　　iii) 連結

- Spanning Tree（全域木，極大木）

  グラフ G の Spanning Tree： G の点をすべて含む部分グラフで木であるもの

- 木の例：

1.5 グラフの表現： 有向グラフ

- 点と枝に番号をふる．

  隣接行列，接続行列

- 与えられたグラフが閉路を含まない場合，点の番号を付け替えることにより，その隣接行列を上三角行列とすることができる．

  この時，各点に与えた番号は，トポロジカル・オーダと呼ばれる．(cf. ＰＥＲＴ)

- 与えられたグラフが閉路を含む場合，点の番号を付け替えることにより，その隣接行列をブロック上三角行列とすることができる．

  ブロックは強連結成分である．

  ブロック（強連結成分）を求め，ブロックを合成点とみなして閉路を含まないグラフに帰着させ，ブロック上三角行列にする．

  ブロック（強連結成分）を求めるには，可到達行列を求めるとよい．

- 可到達行列： i-j 成分 $=$ i から j へ，枝を 0 回以上辿って，到達できる（1）か否（0）か を表した行列．

- 隣接行列の乗算　　$a_{ij}^{(2)} = \bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge a_{kj}) = (a_{i1} \wedge a_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge a_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{in} \wedge a_{nj})$

1.6 演習問題